Differenciálegyenletek kiegészítő feladatsor
Többváltozós analízis 2 gyakorlathoz

1. a) Rajzoljunk iránymezőt az $yy' + x = 0$ differenciálegyenlethez, az alapján sejtsük meg a differenciálegyenlet megoldásait, majd visszahelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy ezek tényleg megoldások!

   b) Keressük meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását integrálással is!

   c) Oldjuk meg az $yy' + x = 0$, $y(3) = -4$ kezdetiérték-problémát!

2. Egy tavon csónakázunk. Ha abbahagyjuk az evezést, akkor a víz ellenállása lefékezi a hajót. Tegyük fel, hogy ennek a fékezőerőnek a nagysága arányos a hajó sebességével. Írjunk fel ez alapján differenciálegyenletet a víz által lefékeződő csónak

   a) sebességére.

   b) helyzetére.

   c) Oldjuk meg (legalább) az egyik differenciálegyenletet!

3. Newton lehűlési törvénye szerint egy állandó hőmérsékletű környezetben lévő tárgy hőmérsékletének változási sebessége egyenesen arányos a környezet hőmérsékletének és a tárgy hőmérsékletének különbségével. Írjuk fel ez alapján a lehűlési törvényt differenciálegyenlet alakban, majd oldjuk meg a differenciálegyenletet!

4. Egy csésze 90 °C-os kávé gőzölög a 20 °C-os konyhában. Pont annyi tejjel szeretjük, amennyivel elérjük, hogy a tej hozzáadása után a tejeskávé hőmérséklete az elkeveredés után mindig épp a meleg kávé és a hideg tej hőmérsékletének átlaga legyen. Mivel a tej a hűtőszekrényben 6 °C-os, nekünk pedig 40 °C a legforróbb, amit meg tudunk inni, sajnos még várnunk kell, pedig roppant türelmetlenek vagyunk.

   a) Mikor járunk jobban, ha azonnal beletesszük a tejet és megvárjuk, amíg eléri a tejeskávé a 40 °C-ot, vagy ha addig várunk a tej hozzáadásával, amíg a kávé ki nem hűl annyira, hogy a tej hozzáöntése után azonnal ihatóvá válik?

   b) Hányszor többet kell annak várnia, aki rosszul dönt?

5. Egy végtelenül nyújtható, kezdetben 10 cm hosszú gumiszalagunk van, amelynek egyik vége a falhoz van rögzítve, és ezen a végén a hangyák kedvenc csemegéje van. A másik végéről elindul egy hangya a gumiszalagon a fal felé 1 cm/s sebességgel, de ugyanekkor egy gonosz manó elkezdi húzni ellenkező irányba a gumiszalag végét 100 cm/s sebességgel.

   a)* Jelöljük $y(t)$-vel a hangya faltól vett távolságát t idő után. Írjuk fel azt a kezdetiérték-problémát, amelynek megoldása ez az $y(t)$ függvény!

   b) Oldjuk meg a kapott differenciálegyenletet, majd döntsük el, hogy eléri-e előbb-utóbb a falat a hangya!

   c)** Döntsük el differenciálegyenlet nélkül, hogy eléri-e előbb-utóbb a falat a hangya!

6. a) Rajzoljunk iránymezőt a(z előadáson tanult) korlátlan növekedésű populáció modell $x'(t) = kx(t)$ differenciálegyenletéhez (egy szabadon választott rögzített k érték mellett)!

b) Keressük meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását (általános k-ra)!

c) Egy baktériumtenyészetben 12:00-kor 3 millió baktérium van, 13:00-kor 5 millió. Feltételezve, hogy a szaporodás a fenti modell szerint történik, határozzuk meg k értékét, majd azt, hogy mennyi volt az egyedszám 12:10-kor!

7. Egy száz literes tele tartályban kezdetben tiszta víz van. Egy csőből percenként 10 liter 30 g/l sókoncentrációjú tengervíz kezd (azonnal tökéletesen elkeveredve) belefolyni a medencébe, és egy túlfolyón át ugyanennyi víz távozik is a tartályból. Mennyi lesz a só koncentrációja a tartályban 20 perc után?

8. Határozzuk meg azokat a differenciálható függvényeket, melyek grafikonjának minden érintője átmegy az origón!

9. Határozzuk meg azokat a differenciálható függvényeket, melyek grafikonjának minden érintőjére az teljesül, hogy az érintési pont épp felezi az érintőnek a koordinátatengelyek közötti szakaszát!

10. Találjunk ki további olyan feladatot, amely differenciálegyenlethez vezet, és ha tudjuk, oldjuk is meg az egyenletet!

11. a) Oldjuk meg a rugón rezgő test mozgását leíró $mx''(t) = -Dx(t)$ differenciálegyenletet, ahol t jelöli az időt, $x(t)$ az egyensúlyi helyzettől való kitérés nagysága t idő eltelte után, m a test tömege, D pedig a rugóállandó!

    b) Mi a periódusa a kapott függvényeknek?

    c) Legyen $m = 2$ kg, $D = 200$ N/m. Tegyük fel, hogy az egyensúlyi helyzethez képest 10 cm-re kihúzzuk a rugóra tett testet, majd elengedjük. Írjuk fel a kapott kezdeti érték problémát, majd oldjuk is meg!

12. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

    a) $xy' + y^2 = -1$ b) $f'(x) - xf(x) = x^3$ c) $f''(t) - f'(t) + 6f(t) = 0$

    d) $y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1$ e) $f'(x) = (f(x))^2 + 1$ f) $y'' + 4y' + 4y = 0.$

13. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémákat!

    a) $y' = e^{y-x}, \quad y(1) = 2$

    b) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 2$

14. a) Oldjuk meg a radioaktív bomlás $x'(t) = -kx(t)$ egyenletet, ahol k a radioaktív anyagra jellemző állandó!

    b) A kormeghatározásra használt C_{14} rádioaktív szénizotóp felezési ideje 5730 év, azaz ennyi év után csökken a felére a C_{14} aránya a teljes szénmennyiséghez viszonyítva. Határozzuk meg ez alapján a C_{14}-re jellemző fenti k állandót!

    c) Ha az ősember barlangjában talált mamut csontjában a C_{14} aránya 15%-a az élő anyagra jellemző aránynak, akkor kb. hány éve ejtették el ezt a mamutot?

15. A 100 fokos forró lekvárt kiraktuk hűlni a 20 fokos levegőre. A lekvár hőmérséklete 10 órakor 30 fok, 11 órakor 25 fok. Mikor raktuk ki a lekvárt?