

Jordan-mérték kiegészítő feladatsor
Többváltozós analízis 2 gyakorlathoz
(még bővíthet)

1. a) Írjuk fel az origó középpontú, 1 sugarú \overline{B}_1 zárt körlapot normáltartományként, azaz adjunk meg egy $[a, b]$ intervallumot, és azon f és g függvényeket, amelyekre

$$\overline{B}_1 = \{(x, y) : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

- b) Írjuk fel a fentiek alapján a \overline{B}_1 körlap területét megadó integrált!
c) Számítsuk is ki az integrált!
d) Csináljuk végig a fentieket a $p = (p_1, p_2)$ középpontú, r sugarú $\overline{B}_r(p)$ zárt körlapra is!
2. Rajzoljuk le azt a testet, melynek a térfogata definíció szerint az
- a) $f(x, y) = x$ függvény integrálja a $[0, 1] \times [0, 1]$ halmazon!
b) $f(x, y) = x + y$ függvény integrálja a $[0, 1] \times [0, 1]$ halmazon!
c) $f(x, y) = 1 - x - y$ függvény integrálja a $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ csúcsú zárt háromszöglapon!

3. a) Adjuk meg (és képzeljük el) azt a halmast a térben, amelynek belső illetve külső mértéke épp az

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \text{ vagy } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény alsó illetve felső integrálját adja meg a $[0, 1] \times [0, 1]$ halmazon!

- b) Határozzuk meg a kapott halmaz belső illetve külső mértékét és döntsük el, hogy mérhető-e!
c) Határozzuk meg a fenti f függvény alsó illetve felső integrálját a $[0, 1] \times [0, 1]$ halmazon és döntsük el, hogy integrálható-e!
4. a) Bizonyítsuk be, hogy ha X , Y és Z korlátos nemüres részei a számegyenesnek és bármely $x \in X$, $y \in Y$ esetén $x + y \in Z$, akkor $\sup Z \geq \sup X + \sup Y$.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha A és B egymásba nem nyúló korlátos halmazok a síkon, akkor $t_b(A \cup B) \geq t_b(A) + t_b(B)$.
(Ha valakinek esetleg nem megy az (a) rész bizonyítása, attól még természetesen a (b) részt megpróbálhatja az (a) rész állításának felhasználásával.)

5. Bizonyítsuk be, hogy a síkon minden

a) zárt konvex sokszöglap

* b) zárt, korlátos, konvex halmaz

megadható két folytonos függvény közötti normáltartományként.