Többváltozós integrálás és polárkoordináták

kiegészítő feladatsor többváltozós analízis 2 gyakorlathoz

1. Számítsuk ki a következő, Descartes-koordinátákkal megadott pontok polár koordinátáit!

   a) $(-3,-4)$ b) $(2,-2)$ c) $(-6,12)$

2. Számítsuk ki a következő, polár koordinátákkal megadott pontok Descartes koordinátáit!

   a) $(2,\frac{\pi}{3})$ b) $(3,\frac{5\pi}{3})$ c) $(1,1)$

3. Határozzuk meg polárkoordináták és integrálás segítségével az alábbi mennyiségeket!

   a) R sugarú körlap területe

   b) R sugarú h magasságú egyenes körkúp térfogata

4. Rajzoljuk le azokat a tartományokat, amelyeken vett kettős integrálok az alábbi módon számíthatóak ki! Számítsuk ki az integrálokat!

   a) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy\,dydx$ b) $\int_0^{\pi}\int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dxdy$ c) $\int_0^2\int_0^{y^2} (x+y)\,dxdy$ d) $\int_0^2\int_{x^2}^{4} xe^{y^2}\,dydx$

5. Fogalmazzuk meg, hol helyezkednek el, valamint rajzoljuk le a következő halmazok polár koordinátákkal megadott pontjait:

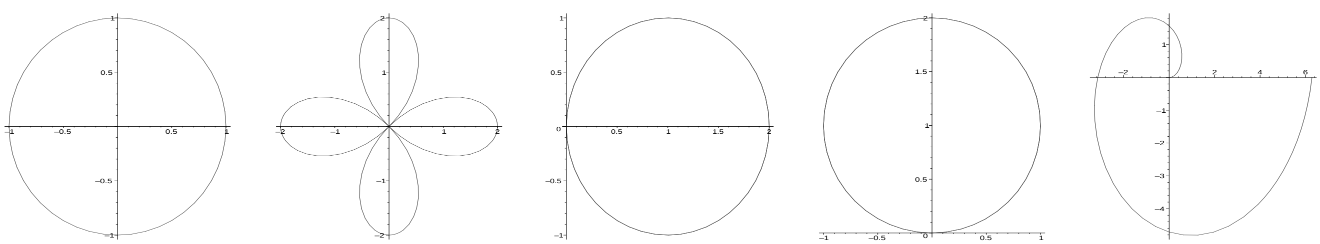
   a) $\{(r,\pi/3) : 1 \le r \le 2\}$ b) $\{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le \pi, 1 \le r \le 2\}$

   c) $\{(7,\varphi) : 1 < \varphi < 3\}$ (Milyen hosszú ez a görbe?)

   d) $\{(r,\varphi) : -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, r = \frac{1}{\cos\varphi}\}$

6. Ábrázoltunk néhány halmazt, amelyek egyenleteit megadtuk polár koordinátákkal. Sajnos az egyenletek is, és a rajzok is összekeveredtek. Keressük meg az ábrákhoz tartozó egyenleteket, és számítsuk ki a második ábrán látható halmaz által határolt "négylevelű lóhere" területét!

   a) $r = 2\cos 2\varphi$ b) $r = 1$ c) $r = 2\cos\varphi$ d) $r = 2\sin\varphi$ e) $r = \varphi$



7. Gördítsünk körbe egy R sugarú kört egy fix R sugarú körön. A gördülő kör egy kiválasztott pontjának pályáját *kardioid*nak hívják.

   a) Írjuk fel polárkoordinátákkal azt a kardioidot, melynél a fix kör középpontja $(R,0)$, a gördülő kör kiválasztott pontja pedig az origóban éri el a fix kört.

   b) Határozzuk meg a kardioid területét.