1. Bizonyítsuk be az egyenlőtlenségek 3 alapvető tulajdonságát (tranzitivitás, „hozzáadás”, „szorzás”) felhasználva, hogy a $(0, \infty)$ intervallumon az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény szigorúan monoton! A megoldás során csak az egyenlőtlenségek 3 alapvető tulajdonságát használhatjuk, korábban bizonyított állításokat nem.

Megoldás:

Azt bizonyítjuk be, hogy a $(0, \infty)$ intervallumon az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény szigorúan monoton csökken.

Ehhez azt kell belátni, hogy minden $0 < x_1 < x_2$ szám esetén $\dfrac{1}{x_1^2} > \dfrac{1}{x_2^2}$.

Induljunk ki az $x_1 < x_2$ egyenlőtlenségből. Mivel x_1 is, és x_2 pozitív, alkalmazhatjuk a „szorzási” szabályt a következő módokon:

$x_1^2 < x_1x_2$ és $x_1x_2 < x_2^2$. Ezekből a tranzitivitást felhasználva $x_1^2 < x_2^2$.

Mivel $\dfrac{1}{x_1^2}$ és $\dfrac{1}{x_2^2}$ pozitív, a szorzási szabály szerint:

$\dfrac{x_1^2}{x_2^2} < 1$, majd $\dfrac{1}{x_2^2} < \dfrac{1}{x_1^2}$.

2. Tegyük fel, hogy $a > b$ és $x > y$. Következik-e ebből, hogy

(a) $a - x > b - y$?

Megoldás:

Nem következik. Ellenpélda: $a = 100, b = 50, x = 90, y = 5$. Mivel $100 > 90$ és $90 > 5$, a feladat feltételei teljesülnek. De $a - x = 10 < 45 = b - y$, tehát a következtetés hamis.

(b) $a - y > b - x$?

Megoldás:

Következik.

Induljunk ki abból, hogy $a > b$. A „hozzáadás” szabálya miatt $a - y > b - y$.

Most induljunk ki abból, hogy $x > y$. A „hozzáadás” szabályát alkalmazzuk kétszer, így $x - y > 0$, majd $-y > -x$. Megint a hozzáadás szabályát alkalmazzuk: $b - y > b - x$.

Az előzőek szerint $a - y > b - y$ és $b - y > b - x$, ezért a tranzitivitás miatt $a - y > b - x$.

3. Van-e olyan x valós szám, amelyikre igaz, hogy az $x,\ [x],\ \{x\}$ számok közül pontosan 2 racionális?

Megoldás:

Mivel $[x]$ egész szám, $[x]$ biztosan racionális.

Definíció szerint $x = [x] + \{x\}$, amiből $[x] = x - \{x\}$. Tehát $x - \{x\} = x + (-\{x\})$ is racionális.

Mivel egy racionális és egy irracionális szám összege nem lehet racionális, ezért vagy x is és $\{x\}$ is racionális, és akkor a feladatban levő mindhárom szám racionális, vagy x is és $\{x\}$ is irracionális, és akkor a feladatban szereplő számok közül pontosan 1 racionális.

Tehát nincs olyan x valós szám, amelyikre igaz, hogy az $x,\ [x],\ \{x\}$ számok közül pontosan 2 racionális.

4. Vannak-e olyan a, b, c pozitív számok, amelyeknek az összege 12, és a szorzatuk 65?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy vannak a feladat feltételeinek megfelelő számok. Ekkor

$A(a, b, c) = \dfrac{a + b + c}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$, és $G(a, b, c) = \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{65}$.

Mivel $G(a, b, c) = \sqrt[3]{65} > 4 = A(a, b, c)$, ellentmondásra jutottunk, tehát nincsenek a feladat feltételeit kielégítő pozitív számok.

5. Egy téglalap alakú kert egyik oldalát egy folyó határolja, a másik három oldalt pedig egy összesen 300m méter hosszú kerítés. Legfeljebb mekkora lehet a kert területe ?

Megoldás: Legyen a téglalap 3 oldalát alkotó szakaszok hossza a, b, a. Ekkor a kerítés hossza $K = 2a + b$, a kert területe pedig $T = ab$.

$A(2a, b) = \dfrac{2a + b}{2} = \dfrac{K}{2}$ és $G(2a, b) = \sqrt{2ab} = \sqrt{2T}$.

Mivel $G \le A$, ezért $\sqrt{2T} \le \dfrac{K}{2}$, amiből $T \le \dfrac{K^2}{8}$.

Tehát a kert területe nem lehet nagyobb, mint $\dfrac{K^2}{8} = \dfrac{90000}{8} = 11250\text{m}^2$. A kert területe pontosan akkor lesz 11250m^2, ha $2a = b$.

A $2a + b = 300, \quad 2a = b$ egyenletrendszer megoldása $a = 75\text{m}, b = 150\text{m}$.

6. Mutassunk olyan pozitív N számot, amelyre igaz, hogy ha $n > N$, akkor $2n^5 - 3n^4 > n^4 - 1000$.

Megoldás:

A feladatban szereplő egyenlőtlenség ekvivalens a $2n^5 - 4n^4 > -1000$ egyenlőtlenséggel.

Ha $n^5 > 4n^4$, azaz $n > 4$, akkor $2n^5 - 4n^4 > 2n^5 - n^5 = n^5 > -1000$, ahol az utolsó egyenlőtlenség minden pozitív egész n-re teljesül. Tehát az $N = 4$ megoldása a feladatnak.

7. Bizonyítsuk be, hogy $\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin 10 < 6$.

Megoldás:

Ha felrajzoljuk a $\sin x$ függvény grafikonját, akkor észrevehetjük, hogy
$\sin 1 > 0, \sin 2 > 0, \sin 3 > 0, \sin 7 > 0, \sin 8 > 0, \sin 9 > 0$, és hogy
$\sin 4 < 0, \sin 5 < 0, \sin 6 < 0, \sin 10 < 0$.

Továbbá tudjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin x \le 1$. Ezért

$\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \sin 4 + \sin 5 + \sin 6 + \sin 7 + \sin 8 + \sin 9 + \sin 10 <$
$1 + 1 + 1 + \sin 4 + \sin 5 + \sin 6 + 1 + 1 + 1 + \sin 10 = 6 + \sin 4 + \sin 5 + \sin 6 + \sin 10 < 6.$