NÉHÁNY NEVEZETES EGYENLŐTLENSÉG KÖZÖS FORRÁSÁRÓL.*

1. *Legyenek*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

és

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

valós számok. Alakítsuk a második sorozat minden

$$b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}$$

permutációjához az

$$S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$$

összeget. Melyik lesz ezen összegek közül a legnagyobb és melyik a legkisebb?

E kérdésre bizonyos konkrét esetekben — azt hiszem — mindenki azonnal megadja a helyes választ. Képzeljük például, hogy egy fiókban 10 pengős, egy másikban 20 pengős, egy harmadikban 50 pengős, egy negyedikben 100 pengős bankjegyek vannak és hogy jogunk van az egyes fiókokból 3, 4, 5, 6 bankjegyet kivenni, de ránk van bizva, hogy melyikből mennyit veszünk. Bizonyára mindenki legelőnyösebbnek fogja találni, hogy a legtöbbet (6 bankjegy) abból a fiókból vegye ki, amelyben a legnagyobb bankjegyek vannak, az utána következő legtöbbet (5 bankjegy) az 50-esek fiókjából és így tovább; viszont, hogy a legkevésbbé előnyös az lesz rá nézve, ha a legtöbb bankjegyet a 10-esek fiókjából veszi, az utána következő leg-

* Megjegyzések a XXXIX. matematikai tanulóverseny első tételéhez (l. ezt e kötet 166. lapján).

többet a 20-asok fiókjából, és így tovább. Azaz, ha b_1, b_2, b_3, b_4 a 3, 4, 5, 6 számok egy tetszésszerinti permutációját jelentik,

$$10.6+20.5+50.4+100.3 \leqq 10b_1+20b_2+50b_3+100b_4 \leqq$$
$$\leqq 10.3+20.4+50.5+100.6.$$

Általában is így van. *Az S összegek közül a legnagyobb az, amelyben a **b** számok ugyanúgy vannak rendezve, mint az **a** számok* (azaz a legnagyobb a szorzója a legnagyobb b, az utána következő a szorzója az utána következő b, stb.) *és a legkisebb az, amelyben a két számsorozat ellenkezőképen van rendezve.*

E tétel GROSSCHMID LAJOS egy tanítványának, FICHTL BÉLÁ-nak készülő doktori dolgozatában van így megfogalmazva. FICHTL bizonyítását nem akarjuk itt reprodukálni, mert meglehetősen nehézkes. GROSSCHMID LAJOS adott egy sokkal könnyebben áttekinthető bizonyítást, mely ABEL lemmáján nyugszik. A következő bizonyítás azon az egyszerű tényen alapszik, hogy bármely permutációból eljuthatunk egy megadott permutációhoz azáltal, hogy két-két elemet felcserélünk.

Legyen a_r a legnagyobb a és b_s a legnagyobb b. Ha $r \neq s$, akkor cseréljük fel b_r és b_s-et, miáltal az

$$S = a_1b_1 + \cdots + a_rb_r + \cdots + a_sb_s + \cdots + a_nb_n$$

összeg helyére az

$$S' = a_1b_1 + \cdots + a_rb_s + \cdots + a_sb_r + \cdots + a_nb_n$$

összeg lép, mely általában S-nél nagyobb, mert

$$S' - S = a_rb_s + a_sb_r - a_rb_r - a_sb_s = (a_r - a_s)(b_s - b_r).$$

Az $S' = S$ egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_r = a_s$ vagy $b_r = b_s$, de akkor máris a legnagyobb a szám a legnagyobb b-vel van az S összegben megszorozva és cserére nincs szükség.

Minekutána a legnagyobb a mellé a legnagyobb b-t hoztuk, újabb cserével a nagyságban következő b-t a nagyságban következő a mellé visszük és így tovább. Az összeg minden lépésnél nagyobbodott, tehát végeredményben S kisebb (vagy akkora), mint az az összeg, amelyben a b-k *éppúgy* vannak rendezve, mint az a-k. Egyenlőség nyilván csak úgy áll fenn, ha minden csere alkalmával az ott szereplő a-k vagy b-k egyenlők. Az S összegek nem valamennyien egyenlők, ha van két különböző a és két különböző b.

A legkisebb összegre vonatkozó állítás teljesen a fenti mintára bizonyítható be.

2. Hogy a most bebizonyított kettős egyenlőtlenség nem valami üres tétel, azt következményei mutatják. Például levezethetjük belőle, hogy *tetszésszerinti*

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

pozitív számok geometriai középe kisebb, mint számtani középük, kivéve, ha e számok valamennyien egyenlők, amikor is a két közép összeesik.

Legyen ugyanis

$$c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

a geometriai közép és vezessük be az

$$a_1 = \frac{x_1}{c},\ a_2 = \frac{x_1 x_2}{c^2},\ a_3 = \frac{x_1 x_2 x_3}{c^3}, \dots,\ a_n = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{c^n} = 1\,;$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\ b_2 = \frac{1}{a_2},\ b_3 = \frac{1}{a_3}, \dots,\ b_n = \frac{1}{a_n} = 1$$

sorozatokat. A felírás rendjében ez a két sorozat máris ellenkezőképen van rendezve, tehát

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

kisebb, mint például

$$a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1},$$

azaz

$$1 + 1 + \dots + 1 \leqq \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \dots + \frac{x_n}{c},$$

$$c \leqq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n,$$

azaz

$$\frac{x_1}{c} = \frac{x_1}{c}\frac{x_2}{c} = \frac{x_1}{c}\frac{x_2}{c}\frac{x_3}{c} = \cdots = \frac{x_1}{c}\frac{x_2}{c}\cdots\frac{x_n}{c} = 1$$

vagy végre, ha

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = c.$$

(Az említett tanulóverseny-tétel ebbe a körbe vág. Ott ugyanis

$$b_1 = \frac{1}{a'_1},\ b_2 = \frac{1}{a'_2}, \ldots,\ b_n = \frac{1}{a'_n},$$

ahol $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok tetszőleges permutációját jelentik. A b-k nyilván az a-khoz képest ellenkezően vannak rendezve, ha

$$a'_1 = a_1,\ a'_2 = a_2, \ldots,\ a'_n = a_n,$$

amikor is az $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ összeg minimumát veszi fel és a minimum: n).

3. Egy Tchebychef-féle egyenlőtlenséget is levezethetünk, mint közvetlen folyományt, az 1. alatt bebizonyított kettős egyenlőtlenségből.

Legyen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

a valós számoknak két *egyformán* rendezett sorozata. Ekkor alaptételünk szerint

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,\\
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &\geqq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1,\\
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &\geqq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &\geqq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}
\end{aligned}$$

és összeadással:

$$n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \geqq (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n),$$

$$\frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n} \geqq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}. \qquad (T)$$

Hasonlóképen nyerjük, hogyha az a és b sorozatok *ellenkezőképen* vannak rendezve, akkor

$$\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n} \leqq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+\cdots+b_n}{n}. \qquad (T')$$

Más szavakkal: az a_ib_i szorzatok számtani közepe az első esetben nagyobb, a második esetben kisebb, mint az a_i és b_i számok számtani közepeinek szorzata.

4. Például, ha $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok, továbbá $\alpha > 0$ és $\beta > 0$, akkor az a_i^α és a_i^β számok $(i=1, 2, \ldots, n)$ egyformán vannak rendezve, tehát

$$\Sigma a_i^{\alpha+\beta} \geqq \frac{1}{n} \Sigma a_i^\alpha . \Sigma a_i^\beta .$$

Ha pedig $\alpha>0$, $\beta<0$ ($a_1, \ldots a_n$ továbbra is pozitív számok), akkor ellentétes rendezés áll elő, tehát ilyenkor

$$\Sigma a_i^{\alpha+\beta} \leqq \frac{1}{n} \Sigma a_i^\alpha \Sigma a_i^\beta .$$

Legyen speciálisan $\alpha = \beta = 1$; kapjuk, hogy

$$\Sigma a_i^2 \geqq \frac{1}{n} (\Sigma a_i)^2 ;$$

másként írva:

$$\frac{\Sigma a_i}{n} \leqq \sqrt{\frac{\Sigma a_i^2}{n}}, \qquad (Q)$$

azaz «a számtani közép kisebb, mint a quadratikus közép».

Ha az $a_1 \ldots a_n$ és $b_1 \ldots b_n$ pozitív számsorozatok ellenkezőkép vannak rendezve, akkor a (T') és (Q)-ból adódó

$$\Sigma a_ib_i \leqq \frac{1}{n} \Sigma a_i \Sigma b_i$$

és

$$\Sigma a_ib_i \leqq \sqrt{n \Sigma a_i^2 b_i^2}$$

egyenlőtlenségek jobbak, mint a Cauchy-féle

$$\Sigma a_ib_i \leqq \sqrt{\Sigma a_i^2 \Sigma b_i^2}.$$

Ugyanis

$$\frac{1}{n}\Sigma a_i \Sigma b_i \leqq \frac{1}{n}\sqrt{n\Sigma a_i^2}\sqrt{n\Sigma b_i^2} = \sqrt{\Sigma a_i^2 \Sigma b_i^2}$$

és

$$\sqrt{n\Sigma a_i^2 b_i^2} \leqq \sqrt{n\cdot\frac{1}{n}\Sigma a_i^2 \Sigma b_i^2} = \sqrt{\Sigma a_i^2 \Sigma b_i^2}.$$

Hogy a szóban forgó két egyenlőtlenség közül melyik jobb, arra nincs általános válasz, mert számpéldákkal igazolható, hogy az

$$\frac{1}{n}\Sigma a_i . \Sigma b_i$$

és

$$\sqrt{n\Sigma a_i^2 b_i^2}$$

kifejezések közül hol egyik, hol másik a kisebb.

5. Még Newton-tól származik egy egyenlőtlenségsorozat, mely pozitív számok elemi szimmetrikus formáiról szól.

Legyenek

$$S_1 = \Sigma x_1,\ S_2 = \Sigma x_1 x_2,\ S_3 = \Sigma x_1 x_2 x_3, \ldots$$

a pozitív $x_1, x_2, \ldots x_n$ számok elemi szimmetrikus formái. A szóbanforgó egyenlőtlenségek ezek:

$$\frac{S_1}{n} \geqq \sqrt{\frac{S_2}{\binom{n}{2}}} \geqq \sqrt[3]{\frac{S_3}{\binom{n}{3}}} \geqq \cdots$$

Az elsőt közülük könnyen levezethetjük a Tchebychef-féle egyenlőtlenségből.

Ugyanis

$$\begin{aligned} 2S_2 &= x_1(x_2 + \cdots + x_n) + x_2(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) + \cdots \\ &= x_1(S_1 - x_1) + x_2(S_1 - x_2) + \cdots \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezésben az

$$x_1,\ x_2, \ldots$$

számok az *ellenkezően* rendezett

$$S_1 - x_1,\ S_1 - x_2, \ldots$$

számokkal vannak szorozva, tehát (T') szerint:

$$2S_2 \leqq \frac{1}{n} S_1 (nS_1 - S_1)$$

és ez már csak írásban különbözik az

$$\frac{S_1}{n} \geqq \sqrt{\frac{S_2}{\binom{n}{2}}}$$

egyenlőtlenségtől.

Szűcs Adolf.

SUR LA SOURCE COMMUNE DE CERTAINES INÉGALITÉS REMARQUABLES.

Le lemme dû à M. Fichtl:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ désignant des nombres réels donnés et $i_1, i_2, \ldots, i_n$ une permutation variable des indices $1, 2, \ldots n$; de toutes les sommes

$$S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n},$$

la plus grande est celle où les b sont rangés dans le même ordre que les a, et la plus petite est celle où les b sont rangés dans l'ordre inverse,

admet pour conséquences immédiates que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique, que la moyenne arithmétique d'un certain nombre de produits est supérieure ou inférieure au produit des moyennes des facteurs suivant que les valeurs prises par les facteurs sont rangées dans le même ordre ou dans l'ordre inverse (inégalités de Tchebychef), et d'autres inégalités importantes.

Adolphe Szűcs.