TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1935. évi XXXIX. matematikai tanulóversenyről.

A Társulat XXXIX-ik matematikai tanulóversenyét 1935. okt. 12-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 30, Szegeden 5 versenyző jelentkezett; beadtak 22, illetőleg 3 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

I. Legyen $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok valamely permutációja; bebizonyítandó, hogy

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqq n.$$

II. Egy O pont tudvalevőleg akkor neveztetik egy H ponthalmaz centrumának, ha H bármely pontjának O-ra vonatkoztatott tükörképe ugyancsak pontja H-nak. Bebizonyítandó, hogy egy véges sok pontból álló ponthalmaznak nem lehet két különböző centruma.

III. Egy háromoldalú hasáb minden szögpontjához hozzárendelünk egy-egy számot oly módon, hogy minden A szögponthoz rendelt szám: számtani közepe azon három számnak, melyeket oly szögpontokhoz rendeltünk, melyek A-val a hasáb egy-egy éle által össze vannak kötve. Bebizonyítandó, hogy e hat szám megegyezik egymással.

A beadott dolgozatok megbírálására kiküldött Bizottság, mely Rados Gusztáv elnöklete alatt a következő tagokból állott: Faragó Andor, Fejér Lipót, Szűcs Adolf, Veress Pál és Kőnig Dénes előadó, 1935. okt. 27-én tartott ülésén a következő javaslatban állapodott meg.

«A legjobb két dolgozat szerzői Bella Andor és Csanádi György, bár a 3. feladatra adott megoldásaik hiányosak. Bella dolgozata különösen az 1. tételre adott ügyes bizonyításával válik ki, mely nem hivatkozik a számtani és geometriai közép közötti egyenlőtlenségre. A 2. tételre adott szép bizonyítása ugyancsak matematikai képességeiről tanúskodik. Ezért a Bizottság azt javasolja, hogy az első b. Eötvös Loránd díj Bella Andor-nak adassék, aki a sárospataki ref. gimnáziumban Erdélyi László tanár tanítványa volt. A második díjra a Bizottság CSANÁDI GYÖRGY-öt hozza javaslatba, aki a budapesti áll. Kölcsey Ferenc reálgimnáziumban MESSIK BÉLA tanár tanítványa volt. CSANÁDI dolgozatának egyik érdeme, hogy a 3. feladatban használt módszere sokkal általánosabb tétel bizonyítására is alkalmas.

Dícséretet érdemel BAUER GYÖRGY, aki lényegileg szintén mind a három feladatot megoldotta, de fogyatékos fogalmazással, valamint KRAUSZ JÓZSEF, aki egyedül adta a 3. feladat teljes megoldását.

A Bizottság ezúttal is sajnálattal állapítja meg, hogy a dolgozatok fogalmazása túlnyomóan fogyatékos.»

A Bizottság e javaslatát a Választmány 1935. november 14-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadó ülésen RADOS GUSZTÁV elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Az 1935. évi XXXIX. matematikai tanulóversenyen díjat nyert dolgozatok.

Bella Andor dolgozata.

I. feladat. Feltehetjük, hogy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a számok első permutációja, tehát a nagyobb indexű értéke is nagyobb. Ha $a_k \geqq a_l$ és $b_m \geqq b_n$, illetve $a_k = a_l + \varepsilon_1$, $b_m = b_n + \varepsilon_2$, ahol ε_1 és ε_2 pozitív számok, akkor

$$\frac{a_k}{b_m} + \frac{a_l}{b_n} \leqq \frac{a_l}{b_m} + \frac{a_k}{b_n}; \tag{1}$$

ugyanis:

$$\frac{a_k}{b_m} + \frac{a_l}{b_n} = \frac{a_l + \varepsilon_1}{b_n + \varepsilon_2} + \frac{a_l}{b_n} = \frac{2b_n a_l + b_n \varepsilon_1 + a_l \varepsilon_2}{b_n (b_n + \varepsilon_2)},$$

$$\frac{a_l}{b_m} + \frac{a_k}{b_n} = \frac{a_l}{b_n + \varepsilon_2} + \frac{a_l + \varepsilon_1}{b_n} = \frac{2b_n a_l + b_n \varepsilon_1 + a_l \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}{b_n (b_n + \varepsilon_2)};$$

Ebből nyilvánvaló, hogy

$$\left(\frac{a_k}{b_m} + \frac{a_l}{b_n}\right) + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{b_n b_m} = \frac{a_l}{b_m} + \frac{a_k}{b_n}.$$

Az $\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{b_n b_m}$-ben szereplő mennyiségek pozitívak, tehát elhagyásával a baloldal csökken (ugyanakkora, ha ε_1 vagy ε_2 zérus); és így (1) valóban fennáll. Mit mond ez a tétel? Azt, hogy a hányadosok összege semmiesetre sem nő (tehát vagy fogy vagy ugyanakkora marad), ha két nevezőt olyan értelemben cserélek fel, hogy az egyik hányadosba jusson a kisebb nevező és a kisebb számláló. — Megkeresem tehát azt az $\frac{a_x}{b_x}$ hányadost, ahol $b_x = a_1$ (ez lehetséges, mert minden a-nak megfelel egy b). Ez a b_x kisebb, mint b_1; ha tehát felcserélem, akkor az egyik hányados $\frac{a_1}{b_x} = 1$ lesz, a másik $\frac{a_x}{b_1}$; (1) szerint

$$\frac{a_1}{b_x} + \frac{a_x}{b_1} \leqq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_x}{b_x}.$$

Tehát a hányadosok összege csökkent a felcseréléssel. Ha most $\frac{a_1}{b_x}$-et rögzítem, akkor a_2 lesz a legkisebb számláló, $b_y = a_2$ a legkisebb nevező. Az $\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_y}{b_y}$ helyett a nála kisebb (vagy egyenlő) $\frac{a_2}{b_y} + \frac{a_y}{b_2}$-t téve ismét csökkentem a hányadosok összegét. Már most $\frac{a_2}{b_y} = 1$-et is rögzítem és $\frac{a_3}{b_3}$-mal járok el ugyanígy. A felcserélést n-szer végezve, minden számláló egyenlő lesz a saját nevezőjével, értékük 1 lesz, tehát (figyelembe véve, hogy az összeg csökkent):

$$n = \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \cdots + \overset{n}{1} \leqq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}.$$

Tételünk be van bizonyítva.

II. feladat. Ha a pontok száma véges, akkor van a halmazban az O centrumtól *legtávolabb* eső két pont: A és tükörképe A_1. Ekkor az O köré A-n és A_1-en keresztül húzott r-sugarú kör területére esik H minden pontja. Legyen O_x egy O-tól különböző második centrum; akkor $A_1O_x + AO_x > 2r$, mert $A_1O_xA \triangle$ két oldalának összege nagyobb a harmadiknál. Ha ez így van, akkor vagy AO_x, vagy A_1O_x nagyobb r-nél. Legyen pl. $AO_x > r$. Akkor A_x lévén A tükörképe O_x-re, A_xO_x szintén nagyobb r-nél. De ekkor $AO_x + A_xO_x > 2r$, $AA_x > 2r$; körben az átmérőnél hosszabb egyenes nem képzelhető el, tehát A_x a kör területén kívül esik és így nem lehet a H halmaz pontja. Ezért O_x nem lehet a H halmaz centruma: H-nak centruma csak az egyetlen O lehet.

III. feladat. Legyenek A_1, A_2, A_3 az alaplap, A_4, A_5, A_6 a fedőlap megfelelő sorrendben írt csúcsai és $a_1, a_2, \ldots, a_6$ a hozzájuk rendelt számok. E hat szám számtani közepe legyen a. A feltétel szerint

$$\begin{aligned} 3a_1 &= a_2 + a_3 + a_4, & 3a_4 &= a_1 + a_5 + a_6, \\ 3a_2 &= a_1 + a_3 + a_5, & 3a_5 &= a_2 + a_4 + a_6, \\ 3a_3 &= a_1 + a_2 + a_6, & 3a_6 &= a_3 + a_4 + a_5. \end{aligned}$$

Innen összeadással:

$$\begin{aligned} 3a_1 + 3a_4 &= a_2 + a_3 + a_4 + a_1 + a_5 + a_6 = 6a, \text{ tehát } a_4 = 2a - a_1, \\ 3a_2 + 3a_5 &= a_1 + a_3 + a_5 + a_2 + a_4 + a_6 = 6a, \text{ tehát } a_5 = 2a - a_2, \\ 3a_3 + 3a_6 &= a_1 + a_2 + a_6 + a_3 + a_4 + a_5 = 6a, \text{ tehát } a_6 = 2a - a_3; \end{aligned}$$

a_4, a_5, a_6 ezen értékeit helyettesítve:

$$3a_1 = a_2 + a_3 + 2a - a_1, \quad \text{azaz} \quad 4a_1 = a_2 + a_3 + 2a,$$
$$3a_2 = a_1 + a_3 + 2a - a_2, \quad \text{azaz} \quad 4a_2 = a_1 + a_3 + 2a,$$
$$3a_3 = a_1 + a_2 + 2a - a_3, \quad \text{azaz} \quad 4a_3 = a_1 + a_2 + 2a.$$

Innen kivonással $4a_2 - 4a_3 = a_3 - a_2$, azaz $a_3 = a_2$ adódik és hasonlóan $a_2 = a_1$ és $a_3 = a_1$.

Csanádi György dolgozata.

I. feladat. Legyen

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} = s.$$

Szorozzuk össze s tagjait:

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} = 1,$$

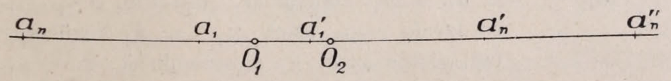
mert a nevezőben lévő szorzat tényezői egyenlőek a számlálóban lévő szorzat tényezőivel, csak más sorrendben. Így $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ mértani közepe $\sqrt[n]{1} = 1$. Viszont pozitív számok számtani közepe nem lehet kisebb a mértani középnél, tehat $\frac{s}{n} \geqq 1$ vagyis

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqq n.$$

Az egyenlőségjel akkor áll fenn, ha $a_i = b_i$.

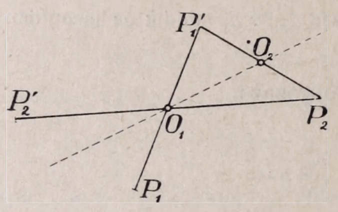
II. feladat. Bizonyítsunk indirekt módon, vagyis tegyük fel, hogy a ponthalmaznak két centruma van: O_1 és O_2. Különböztessünk meg két esetet: a szerint amint H-nak minden pontja az O_1O_2 egyenesen fekszik vagy van ezen kívül is pontja.

1. Ha a H halmaz összes pontjai egy f egyenesen feküsznek és ha a halmaznak van egy centruma: O_1, akkor H pontjai O_1 két oldalán, O_1-re páronként szimmetrikusan feküsznek. Legyenek e pontpárok a_1, a'_1; a_2. a'_2;... ; a_n, a'_n, ahol a_n, ill. a'_n az O_1-től kétoldalt legtávolabb fekvő



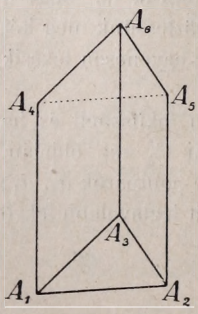
pontokat jelenti. Ha mostan a ponthalmaznak még egy centruma van: O_2 és ez is f-en fekszik, akkor kell, hogy O_2 az a_n és a'_n pontok közül az egyikhez közelebb feküdjék, mert $O_2 \neq O_1$ és $a_nO_1 = a'_nO_1$. Legyen a közelebbi a'_n; ekkor $a_nO_2 > a'_nO_2$. Ha a_n-nek O_2-re vonatkoztatott szimmetrikusa a''_n, akkor tehát $a''_nO_1 > a'_nO_1$. Azonban a'_n a pontsornak legkülső pontja, tehát a''_n csak rajta belül lehet, ha a sorozatnak véges számú tagja van.

2. Ha a halmaznak O_1O_2-n kívül is feküsznek pontjai, úgy válasszunk ki ezek közül egyet: P_1-et. Be fogjuk bizonyítani, hogy ekkor a halmaznak okvetlenül végtelen sok pontja van. P_1-nek O_1-re vonatkoztatott P_1' tükörképe szintén pontja a halmaznak. Ugyanígy P_1'-nek O_2-re vonatkoztatott tükörképe, P_2 is; s í. t. a műveletet a végtelenségig folytathatjuk, úgy, hogy P-nek O_l-re vonatkoztatott szimmetrikusát P_l'-vel, P_l'-nek O_2-re vonatkoztatott szimmetrikusát P_{l+1}-gyel jelöljük. — Most már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy az így szerkesztett pontok közül kettő nem eshet egybe. Bizonyítsunk teljes indukcióval. Tegyük fel, hogy P_k-ig egyik pont sem esett egy másikba. Ekkor P_k' nem eshet egybe valamely P_l ponttal, mert O_1O_2 különböző oldalán fekszenek és nem eshet össze egy P_l' ponttal sem, mert P_l és P_k különböző pontoknak tükörképe is különböző. Vagyis P_k' új pontot jelent. P_2 nyilván nem esik egybe P_1-gyel s P_2', P_3, P_3' s í. t. mind az előzőektől különböző pontok.



Két centrum esetében tehát a halmaznak végtelen sok pontja kell, hogy legyen, mert egy ponthoz a két centrum segítségével végtelenűl sok szükségszerűen hozzátartozó pont képezhető.

III. feladat. Legyenek a hasáb csúcsai, az ábra szerint, $A_1, \ldots, A_6$; a hozzájuk rendelt számok: $a_1, \ldots, a_6$. Tegyük fel, hogy e számok közül kettő különbözik. Ekkor nyilván kell két olyannak is különböznie, melyek egy élen fekszenek. Legyenek ezek pl. a_1 és a_4 és legyen $a_4 > a_1$. — 1) a_1 számtani közepe az a_2, a_3 és a_4 számoknak s így, $a_4 > a_1$ folytán, a_2 és a_3 közül a kisebb, pl. a_2 (hol $a_2 \leq a_3$), kisebb a_1-nél: $a_2 < a_1$. 2) a_2 számtani közepe az a_1, a_3, a_5 számoknak; mivel $a_1 > a_2$ és $a_3 \geq a_2$, azért $a_2 > a_5$. 3) a_5 számtani közepe az a_4, a_6, a_2 számoknak; mivel $a_4 > a_2$, $a_2 > a_5$ és így $a_4 > a_5$, azért $a_6 < a_5$. 4) Végül a_6 számtani közepe az a_5, a_4, a_3 számoknak; mivel $a_4 > a_5$ és $a_5 > a_6$, azért $a_3 < a_6$. — Azonban $a_3 \geq a_2 > a_5 > a_6$, tehát feltevésünk ellenmondásra vezet, vagyis a csúcsokhoz rendelt számoknak mind egyenlőknek kell lenniök. — Megjegyzendő, hogy bizonyításunk alapja az, hogy a számtani közép a legnagyobb és legkisebb szám közé esik.



Ugyanerre az eredményre vezet a $3a_1 = a_2 + a_3 + a_4$, stb. egyenletrendszer megoldása is.