Kepler és az analízis

Johannes Kepler (1571. december 27. – 1630. november 15.) német matematikus és csillagász. Leginkább a bolygómozgás törvényeit kötik a nevéhez, de foglalkozott optikával is, és geometriával is. Kepler többek között ezeket a műveket írta:

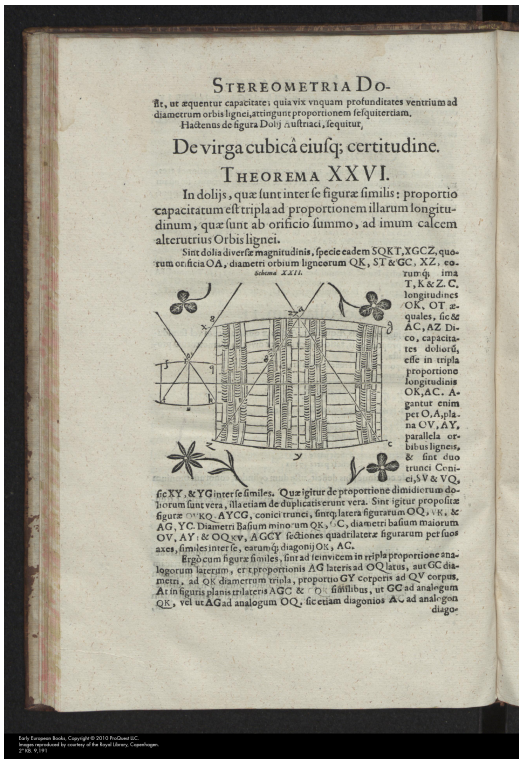
Mysterium cosmographicum (A kozmosz szent titka) (1596),
Astronomiae Pars Optica (A csillagászat optikai része) (1604),
De nive sexangula (A hatszögletű hópehelyről) (1611),
Dioptrice (Dioptria) (1611),
De vero Anno, quo aeternus Dei Filius humanam naturam in Utero benedictae Virginis Mariae assumpsit (A valódi évről, amelyben az örök Isten Fia az áldott Szűz Mária méhében emberként megfogant) (1613),
Harmonice Mundi (Világok harmóniája) (1619),

valamint 1615-ben:

Nova stereometria doliorum vinariorum (A boroshordók új térfogatméréséről).

Kepler és a boroshordó

Kepler első felsége halála után, 1613-ban Linzben (Ausztria) újra nősült. Közvetítőkön keresztül 11 feleségjelölttel találkozott, végül az ötödiknek bemutatott jelöltet vette el. Az esküvőre vett egy hordó bort. Akkoriban úgy határozták meg a hordó űrtartalmát, hogy a kereskedők a hordó feltöltésére szolgáló felső nyíláson, az akonán keresztül betoltak egy pálcát a hordó "átellenes sarkába", és a pálca hosszából következtettek a hordó térfogatára. Feltehetően a kereskedők ismerték a hordóikat, és tudták, hogy milyen pálcahosszhoz hány literes hordó tartozik.



STEREOMETRIA DO-
ſit, ut æquentur capacitate; quia vix vnquam profunditates ventrium ad diametrum orbis lignei, attingunt proportionem ſeſquiteriam.
Hactenus de figura Dolij Auſtriaci, ſequitur,

De virga cubicâ ciuſq; certitudine.

THEOREMA XXVI.

In dolijs, quæ ſunt inter ſe figuræ ſimilis: proportio capacitatum eſt tripla ad proportionem illarum longitudinum, quæ ſunt ab orificio ſummo, ad imum calcem alterutrius Orbis lignei.

Sint dolia diverſæ magnitudinis, ſpecie eadem SQKT, XGCZ, quorum orificia OA, diametri orbium ligneorum QK, ST & GC, XZ, eorumq; imaſchema XXVI.

T, K & Z C, longitudines OK, OT æquales, ſic & AC, AZ Dico, capacitates doliorũ, eſſe in tripla proportione longitudinis OK, AC. Agantur enim per O, A, plana OV, AY, parallela orbibus ligneis, & ſint duo trunci Conici, SV & YQ, ſe XY, & YG inter ſe ſimiles. Quæ igitur de proportione dimidierum doliorum ſunt vera, illa etiam de duplicatis erunt vera. Sint igitur propoſitæ figuræ OVKQ, AYCG, conici trunci, ſintq; latera figurarum OQ, VK, & AG, YC. Diametri Baſium minorum QK, GC, diametri baſium maiorum OV, AY. & OQ, YV, AGCY ſectiones quadrilateræ figurarum per ſuos axes, ſimiles inter ſe, earumq; diagonij OK, AC.

Ergò cum figuræ ſimiles, ſint ad ſeinvicem in tripla proportione analogorum laterum, erit proportionis AG lateris ad OQ latus, aut GC diametri, ad OK diametrum triula, proportio GY corporis ad QV corpus. At in figuris planis trilateris AGC & OQK ſimilibus, ut GC ad analogum QK, vel ut AG ad analogum OQ, ſic etiam diagonios AC ad analogon diago-

Early European Books, Copyright © 2010 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Royal Library, Copenhagen.
2° 65, 9,181

Ábra: Kepler Nova stereometria doliorum vinariorum (A boroshordók új térfogatméréséről) könyvének 107. oldala.

Keplert felháborította ez a mérési módszer, mert pusztán a pálca hosszából nem lehet kiszámolni a hordó térfogatát. Ugyanis, ha a hordó kis átmérőjű, de magas, akkor a pálca hossza lehet ugyanakkora, mint ha a hordó alacsony és nagy az alapkör sugara, de a két hordó térfogata jelentősen eltérhet. Kepler szerint a kereskedő csalt. A tényt, hogy esetleg becsapták, a saját módján kezelte. Hazament, és dolgozni kezdett. Munkájának az eredménye egy 1615-ben megjelent könyv lett: Nova stereometria doliorum vinariorum (A boroshordók új térfogatméréséről).

Nyugat Európa és a régi görögök munkái

Arkhimédész művei ismeretlenek voltak a korai középkori Nyugat-Európában, ekkor csak az arab matematikusok műveit ismerték, de 1269-ben Moerbeke görögről latinra fordította Arkhimédész főbb eredményeit. Olyan eredmények is szerepeltek a fordításban, amelyeket az arab matematikusok nem ismertek, például a kúpszeletek, forgási ellipszoidok, vagy a parabolaszelet területének a kiszámítása. Igaz, hogy a következő két évszázadban alig használták Arkhimédész eredményeit, de később Moerbeke fordítását olvasta Leonardo da Vinci, és ezt a fordítást nyomtatták ki először a XVI. században. Később Regiomontanus (születési nevén Johannes Müller, késő-középkori német matematikus, csillagász, asztrológus, aki udvari csillagászként évekig élt és dolgozott Budán, Mátyás király meghívására a pozsonyi egyetemen is tartott előadást), 1471-ben Nürnbergbe költözött, ahol nyomdát rendezett be. (Gutenberg 1436. után kezdett dolgozni a mozgatható betűelemekkel működő könyvnyomtatáson.) Egy fennmaradt lista szerint a Regiomontanus kiadási tervei között Arkhimédész, Apollóniusz, Heron, Ptolemaiosz, és Diophantosz művei is szerepeltek.

A középkori európai matematikusok sokat foglalkoztak trigonometriával, algebrával, sőt foglalkoztak a végtelen sorokkal is (Richard Suiseth 1350. körül kiszámolta, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$), de a kúpszeleteket nem tartották érdekesnek.

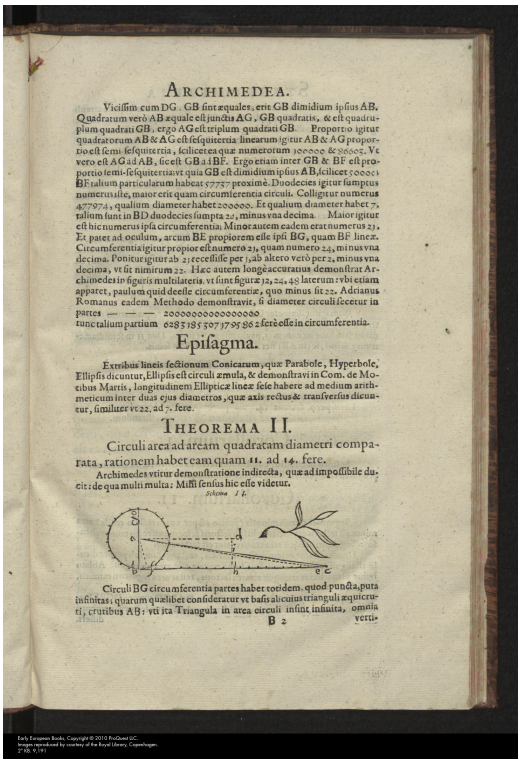
A nyugat-európai matematikusok elemi geometriával csak a XV. század közepén kezdtek foglalkozni. Johannes Werner (1468 - 1522) A kúpok elemei címmű latin nyelvű könyve 1522-ben jelent meg. Papposz (III.- IV. század) óta ekkor fordult először az érdeklődés ismét a kúpszeletek felé. Apollóniusz kúpszeletekről szóló könyvét 1537-ben adták ki Velencében. Ezután felgyorsult a régi görögök könyveinek a kiadása, és 1575-re már mindent tudtak a korábbi eredményekből. Ugyanakkor a nyugat-európai matematikusok továbbra is inkább foglalkoztak trigonometriai és algebrai problémákkal, mint a kúpszeletekkel.

Kepler I. és II. törvénye

Kepler is ismerte Arkhimédész műveit. A csillagászati számításokhoz és optikai eszközök készítéséhez szüksége volt a kúpszeletekre. Kepler a kúpszeletek kapcsán bevezette a folytonosság fogalmát. Keplertől származik a „fókusz” elnevezés is. A latin „focus” szó jelentése „tűzhely” („gyújtópont”). Kepler a kúpszeleteket egységesen vizsgálta, és úgy kapta egyikből a másikat, hogy a fókuszpontokat mozgatta valamilyen irányban akár a végtelenbe is, ahonnan a fókuszpont a másik irányból tért vissza.

Területszámítással Kepler foglalkozott már korábban is. A bolygók pályájáról és a területi sebességéről szóló törvényeit (Kepler I. és II. törvénye) az 1609-ben megjelenő Astronomia Nova (Új csillagászat) című művében közölte. Az I. törvény szerint a bolygók pályája olyan ellipszis, amelynek egyik fókuszpontja a Nap. Ennek a törvénynek a megállapításához Kepler Tycho Brahe megfigyelési adatait használta fel, és az ellipszis alakjának felismerésekor felhasználta Apollóniosz nagyjából 1800 évvel korábban írott, és közben lényegében elfelejtett művét a kúpszeletekről. A II. törvény szerint a bolygót a Nappal összekötő szakasz azonos idő alatt azonos területet súrol. Tehát 1609-ben Kepler már ki tudta számolni az ellipszis területét, sőt a vezérsugár által súrolt ellipsziscikkek területeit is. Ehhez Arkhimédész munkái segítették.

A csillagászati számításokhoz Kepler hasznosnak találta a „végtelenül kicsi” fogalmát. Amikor a kör területét számolta, a kört végtelen sok középponti háromszögre osztotta, és megmutatta, hogy a kör területét megkapjuk, ha a kerületet megszorozzuk sugár felével.



ARCHIMEDEA.

Vicissim cum DG, GB sint æquales, erit GB dimidium ipsius AB. Quadratum verò AB æquale est junctis AG, GB quadratis, & est quadruplum quadrati GB, ergo AG est triplum quadrati GB. Proportio igitur quadratorum AB & AG est sesquitertia: linearum igitur AB & AG proportio est semi-sesquitertia, scilicet ea quæ numerorum 100000 & 86602. Vt verò est AG ad AB, sic est GB ad BE. Ergo etiam inter GB & BE est proportio semi-sesquitertia: vt quia GB est dimidium ipsius AB, scilicet 100000: BE talium particularum habeat 57737 proximè. Duodecies igitur sumptus numerus esset, maior erit quam circumferentia circuli. Colligitur numerus 477974, qualium diameter habet 200000. Et qualium diameter habet 7, talium sunt in BD duodecies sumpta 22, minus vna decima. Maior igitur est hic numerus ipsa circumferentia. Minor autem eadem erat numerus 23. Et patet ad oculum, arcum BE propiorem esse ipsi BG, quam BF lineæ. Circumferentia igitur propior est numero 23, quam numero 24, minus vna decima. Ponitur igitur ab 23 recessisse per 3, ab altero verò per 2, minus vna decima, vt sit nimirum 22. Hæc autem longè accuratius demonstrat Archimedes in figuris multilateris, vt sunt figuræ 12, 24, 48 laterum: vbi etiam apparet, paullum quid deesse circumferentiæ, quo minus sit 22. Adrianus Romanus eadem Methodo demonstravit, si diameter circuli secetur in partes — — — 200000000000000000
tunc talium partium 628318530717958862 ferè esse in circumferentia.

Episagma.

Extribus lineis sectionum Conicarum, quæ Parabole, Hyperbole, Ellipsis dicuntur, Ellipsis est circuli æmula, & demonstravi in Com. de Motibus Martis, longitudinem Ellipticæ lineæ sese habere ad medium arithmeticum inter duas ejus diametros, quæ axis rectus & transversus dicuntur, similiter vt 22. ad 7. fere.

THEOREMA II.

Circuli area ad aream quadratam diametri comparata, rationem habet eam quam 11. ad 14. fere.

Archimedes vtitur demonstratione indirecta, quæ ad impossibile ducit: de qua multi multa: Mihi sensus hic esse videtur.

Icona 1 f.

Circuli BG circumferentia partes habet totidem, quot puncta, puta infinitas; quarum quælibet consideratur vt basis alcuius trianguli æquicrurij, cruribus AB: vti ita Triangula in area circuli insint infinita, omnia verti-

B 2

Early European Books. Copyright © 2010 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Royal Library, Copenhagen.
2°Kb. 9.191

Ábra: Kepler Nova stereometria doliorum vinariorum (A boroshordók új térfogatméréséről) könyvének 20. oldala. (Érdemes megfigyelni, hogy Kepler virágokkal, ágacskákkal díszíti az ábráit.)

Az oldal legalsó sorában levő "infinit infinita" kifejezés mutatja, hogy Kepler infinitezimális mennyiségekkel dolgozott. Kepler anélkül, hogy ismerte volna Arkhimédész számítását, hasonló gondolatmenettel kiszámolta az ellipszis területét is. A megfelelő háromszögeket ugyanúgy „nyomta össze”, ahogy a kört nyomta össze, hogy ellipszis legyen, és az „összenyomott” háromszögek területének az összegével számolta ki az ellipszis területét.

Kepler és a forgástestek térfogata

Kepler a területszámítási tapasztalatok birtokában kezdte el a forgástestek térfogatának a kiszámítását. Több mint 80 forgástest térfogatát ki tudta számolni. A számolásoknál felhasználta Arkhimédész módszereit, de olyan forgástestek térfogatát is ki tudta számítani, amelyekkel Arkhimédész nem foglalkozott. Például úgy kapott forgástesteket, hogy köríveket forgatott meg a határoló húrjuk körül. Ha a körszelet kisebb volt egy félkörnél, akkor „citromnak” nevezte a forgástestet, ha a körszelet nagyobb volt egy félkörnél, akkor „almának”.

A forgástestek térfogatát Kepler úgy számolta ki, hogy a tengelyükre merőleges síkokkal „felszeletelte” a forgástesteket, és a szeletek térfogatát hengerek térfogatával közelítette. Ezt a módszert általánosította később Cavalieri nem forgástestekre. Cavalieri erről szóló könyve, a Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota 1635-ben jelent meg.

STEREOMETRIA DO-

lium constituturum puto ex ventre Sphæroidis Archimedei; quam, ut veræ proximam (nondum notis aliis, quarum genesin suprà docui) CLAVIVS subiecit: paratus tamen interim (verba Clavij) si quis accuratiorem invenerit, eam libenti animo & grato acceptare. Nam Sphæroidis longi, quod in medio justam & dolij aptam habeat buccositatē, flexura versus truncatos vertices nimia est, nec ulla vincula in ea possent diu hærere. Sin autem sumeris medium ventrem sphæroidis valde gracilis; minues quidem hoc incommodum flexuræ nimiæ in extremitatibus dolij, at vicissim ventrem dolio nullum permittit, ac si ex puro puto Cylindro illud construeres.

In hacigitur figura, duo arcus HAF, FCG, circuli cuius diameter æqualis ipsi BT, describunt truncatum Citrium, cuius vertices truncati sunt HNF, EIG. Linea verò punctis notata, inter rectam FRC & arcum FSG, Fusum denotat Hyperbolicum, cuius Hyperboles vertex C, centrum V, Asymptoti VX, VZ. quarum rectitudinem Hyperbola CF, versus F magis magisq; affectat, & hic à contingentia sua FQY, secante arcum FSG in Q, difficulter distinguitur.

Quâ ratione quis Virgam mensoriam falsitatis arguere possit; & quomodo fides ejus asserat.

Igitur ut ad exordium disquisitionis huius revertar, Elenchus meus Virgæ Mensoriæ primum exarhic, quod eadem eius longitudo AF dissimilibus figuris doliorum competeret, quarum tamen non essent æqua spacia.

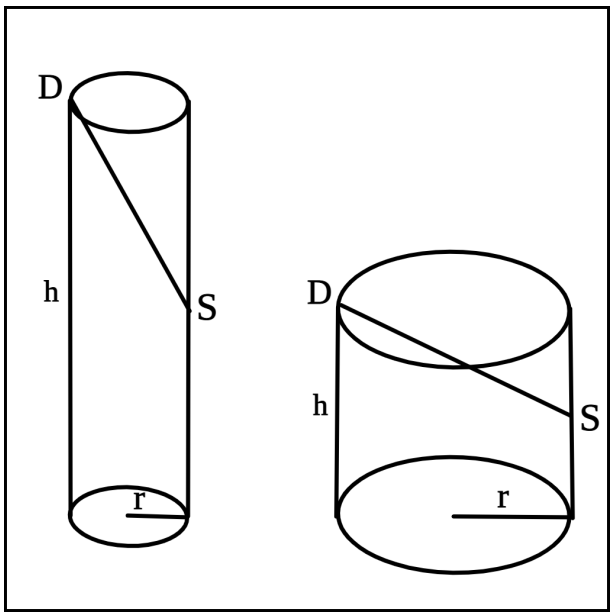
Vt hanc rem in plano demonstrarem: visum est, pro Cylindri corpore, assumere Parallelogrammum, quo Cylinder per

Early European Books. Copyright © 2010 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Royal Library, Copenhagen.
2° KB. 9.191

Ábra: Kepler Nova stereometria doliorum vinariorum (A boroshordók új térfogatméréséről) könyvének 71. oldala. Az ábrát itt felül egy citromfa díszíti.

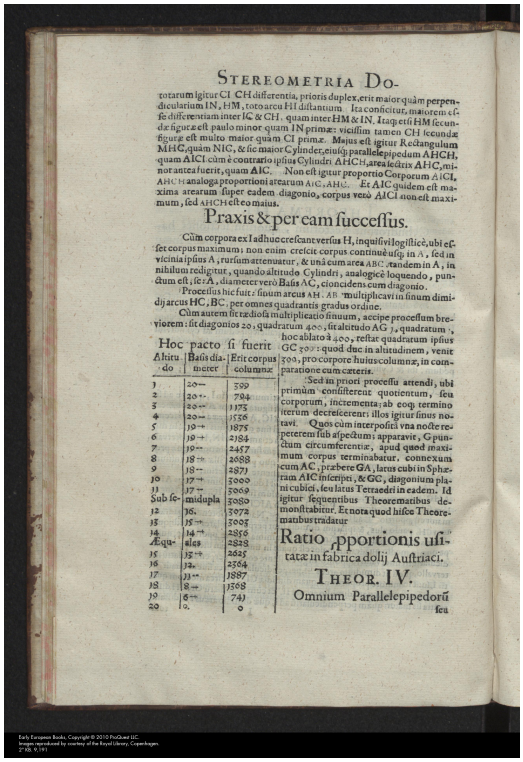
A boroshordó térfogata

Kepler a boroshordó alakját hengerrel közelítette.



Ábra: A két hordó esetében a kereskedő által használt pálca hossza megegyezik, de a két hordó térfogata különböző.

Kepler meghatározta, hogy adott pálcahossz mellett milyen magasságú hordó esetén lesz a térfogat maximális. Kiszámolta a térfogatot adott DS pálcahossz és különböző $h : r$ arányok mellett. Az eredményeit táblázatban rögzítette.



STEREOMETRIA DO-

rotarum igitur CI, CH differentia, prioris duplex, erit maior quàm perpendicularium IN, HM, toto arcu HI distantium. Ita conficitur, maiorem esse differentiam inter IG & CH, quam inter HM & IN. Itaque etsi HM secundæ figuræ est paulo minor quam IN primæ: vicissim tamen CH secundæ figuræ est multo maior quàm CI primæ. Majus est igitur Rectangulum MHG, quàm NIG, & sic maior Cylinder, cuiusq; parallelepipedum AHCH, quam AICI cùm è contrario ipsius Cylindri AHCH, area lectrix AHC, minor antea fuerit, quam AIC. Non est igitur proportio Corporum AICI, AHCH analoga proportioni arearum AIC, AHC. Et AIC quidem est maxima arearum super eadem diagonio, corpus verò AICI non est maximum, sed AHCH est eo maius.

Praxis & per eam successus.

Cùm corpora ex I adhuc crescant versus H, inquisivi logisticè, ubi esset corpus maximum; non enim crescit corpus continuè usq; in A, sed in vicinia ipsius A, rursum attenuatur, & unà cum area ABC, tandem in A, in nihilum redigitur, quando altitudo Cylindri, analogicè loquendo, punctum est, sic A, diameter verò Basis AC, coincidens cum diagonio.

Processus hic fuit: sinum arcus AH, AB multiplicavi in sinum dimidij arcus HC, BC, per omnes quadrantis gradus ordine.

Cùm autem sit tædiosa multiplicatio sinuum, accipe processum breviorem: sit diagonios 20, quadratum 400, sit altitudo AG 1, quadratum 1, hoc ablato à 400, restat quadratum ipsius GC 399: quod duc in altitudinem, venit 399, pro corpore huius columnæ, in comparatione cum cæteris.

Hoc pacto si fuerit

Altitudo	Basis diameter	Erit corpus columnæ
1	20--	399
2	20--	794
3	20--	1173
4	20--	1536
5	19--	1875
6	19--	2184
7	19--	2457
8	18--	2688
9	18--	2871
10	17--	3000
11	17--	3069
Sub semidupla	16.	3080
12	16.	3072
13	15--	3003
14	14--	2856
Æquales		2828
15	13--	2625
16	12.	2304
17	11--	1887
18	8--	1568
19	8--	741
20	0.	0

Sed in priori processu attendi, ubi primùm consisterent quotientum, seu corporum, incrementa; ab eoq; termino iterum decrescerent; illos igitur sinus notavi. Quos cùm interposita vna nocte reperem sub aspectum apparavit, G punctum circumferentiæ, apud quod maximum corpus terminabatur, connexum cum AC, præbere GA, latus cubi in Sphæram AIC inscripti, & GC, diagonium plani cubici, seu latus Tetraedri in eadem. Id igitur sequentibus Theorematibus demonstrabitur. Et nota quod hisce Theorematibus tradatur

Ratio ,pportionis usitatæ in fabrica dolij Austriaci.

THEOR. IV.

Omnium Parallelepipedorũ

seu

Early European Books, Copyright © 2010 ProQuest LLC
Images reproduced by courtesy of the Royal Library, Copenhagen.
2°55, 9,1

Ábra: Kepler Nova stereometria doliorum vinariorum (A boroshordók új térfogatméréséről) könyvének 75. oldala.

Megfigyelte, hogy ha a magasság és a sugár csak kicsit tér el attól, amikor a hordó térfogata maximális, akkor a térfogat sem változik sokat. Mai tudásunkkal ezt úgy fogalmaznánk meg, hogy a lokális maximumhely környékén a függvénygrafikon érintője vízszintes, és a függvényértékek a maximumhely kis környezetében lassan változnak. Kepler a lassú változást a kiszámolt adatokból ismerte fel. A lokális szélsőérték és az érintő kapcsolatával először Fermat (1601-1665) foglalkozott sokkal később.

Kepler finomította is a számításait, a henger helyett többféle hordó alakú test térfogatát is kiszámolta a szeletelős módszerrel. A számításaiban támaszkodott Arkhimédész könyveire, de úgy látta, hogy a saját módszerével sokkal egyszerűbben jut az eredményekhez. Kepler nem tudhatta, mert csak 1906-ban találták meg Arkhimédésznek azt a munkáját, amelyben már ő is a szeletelés módszerét alkalmazta.

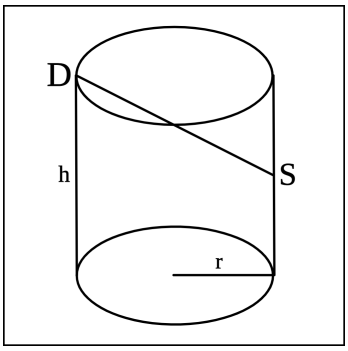
Kepler végül megállapította, hogy a kereskedő, akitől a bort vásárolta az esküvőre, nem csalt. Az osztrák hordók magasságának és sugarának az aránya megegyezett az adott pálcahossz mellett maximális térfogatot adó aránnyal. (A németalföldi hordóknál viszont más volt a helyzet.) Tehát, ha a hordókészítés folyamán nagyjából tartották az arányt, akkor a hordó térfogata sem változott sokat. Kepler szerint ez nem volt véletlen. Úgy gondolta, hogy hozzá hasonlóan valaki már évszázadokkal korábban kiszámolta a hordók térfogatát, és bevezette az osztrákoknál azt a szabványt, ahol a pálcahosszból egyszerűen lehetett következtetni a térfogatra.

Feladatok

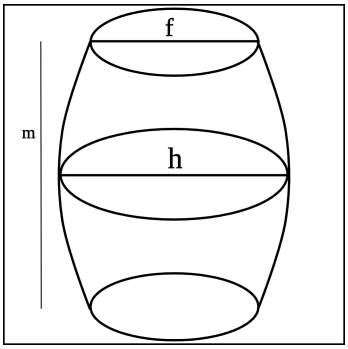
1. Húzzuk meg egy R sugarú körlap egy sugarát, majd azt a húrt, amelyik merőlegesen felezi az előző sugarat. Vágjuk ketté a körlapot az előző húr mentén. A húr körül a kisebb körszeletet megforgatva „citromot”, a nagyobb körszeletet megforgatva „almát” kapunk. Számítsuk ki a két forgástest térfogatát!

2. Készítsünk valamilyen számítógépes programmal szemléltető ábrákat az előző feladathoz!

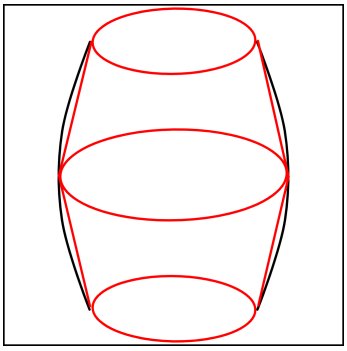
3. Számítsuk ki, hogy adott DS pálcahossz mellett milyen $h : r$ arány esetén lesz a henger térfogata maximális!

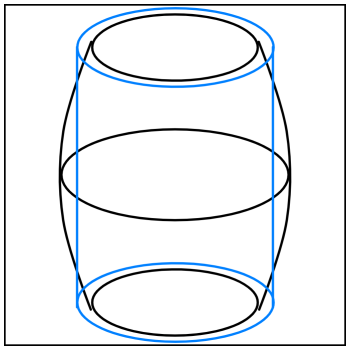


4. Egy 330 literes tölgyfahordó magassága $m = 80$cm, has átmérője $h = 80$cm, fej átmérője $f = 64$cm.



Számoljuk ki a hordó térfogatának a közelítő értékét úgy, hogy két csonkakúppal közelítjük a hordó alakját, illetve úgy is, hogy egy egy olyan henger térfogatát számoljuk ki, amelynek a magassága megegyezik a hordó magasságával, az alapkörének az átmérője pedig a has átmérő és a fej átmérő számtani közepe: $\dfrac{h+f}{2}$. Melyik számolás adja a jobb közelítést?





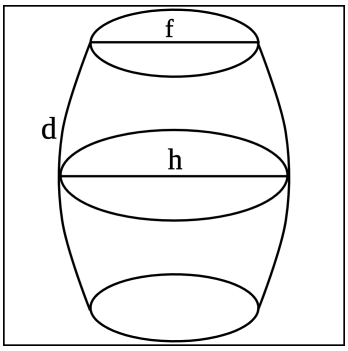
5. A hordó térfogatának kiszámítására szokás a $V = \frac{m\pi}{3}\left(2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2\right)$ tapasztalati képletet alkalmazni. Számoljuk ki ezzel a képlettel az előző feladatban szereplő hordó térfogatát!

6. Számoljuk ki az előző feladatokban szereplő hordó térfogatát integrálással, ha feltételezzük, hogy a donga ívének az alakja

(a) körív, **(b)** parabolaív.

Melyik esetben kapunk jobb közelítést?

7. A hordóknál valójában nem a hordó magasságát, hanem a d dongahosszt szokás megadni. A 300 literes tölgyfahordó dongahossza $d = 100$cm, has átmérője $h = 80$cm, fej átmérője $f = 64$cm.



Számoljuk ki a hordó magasságát, ha feltételezzük, hogy a donga ívének az alakja

(a) körív, **(b)** parabolaív.

Oldjuk meg a most számolt magassággal is az előző feladatokat!

8. Mennyi bor van az előző, oldalára fektetett hordóban, ha a bor felszínének a távolsága a has átmérő alsó végpontjától 50cm?

Irodalom

Kepler: Nova stereometria doliorum vinariorum (A boroshordók új térfogatméréséről)

Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer: A History of Mathematics

Victor J. Katz: A History of Mathematics

David Toeplitz: The Calculus

Yakov Perelman: Szórakoztató geometria