Bevezető analízis II. példatár

Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

2015. január 28.

Tartalomjegyzék

1. Bizonyítási módszerek, valós számok

Biztatásul közlöm, hogy tévesnek bizonyult a cáfolata annak a híresztelésnek, mely szerint mégsem hazugság azt tagadni, hogy lesz olyan hallgató, akinek egy analízis feladatot sem kell megoldania ahhoz, hogy ne bukjon meg.

(Baranyai Zsolt)

1.1. Állítások, tagadások, logikai műveletek, halmazok

1.1.1. Bevezető feladatok

Balkezes Bendegúz a bal kezével mindig igaz, a jobb kezével mindig hamis állításokat írt. Melyik kezével írta a következő állításokat? Fogalmazzuk meg az állítások tagadását! Döntsük el az állításokról is, és a tagadásokról is, hogy igazak-e! Minden választ indokoljunk!

1.1. Ha $1 = 1$, akkor $2 = 3$.

1.2. Ha $1 = 2$, akkor $2 = 3$.

1.3. Ha az f függvény monoton csökken $\mathbb{R}$-en, akkor $(-f)$ monoton nő $\mathbb{R}$-en.

1.4. Ha az f függvény páratlan, akkor f^2 páros.

1.5. Ha az f függvény páros, akkor f^3 páratlan.

1.6. Ha az f függvény periodikus, akkor $|f|$ is periodikus.

1.7. Ezt a mondatot a bal kezemmel írtam.

1.8. Minden (-2)-nél kisebb pozitív szám szereti a tökfőzeléket.

1.9. Van olyan (-2)-nél kisebb pozitív szám, amelyik szereti a tökfőzeléket.

1.10. A teremben hallgatók ülnek, az asztalon nyalókák vannak. Ugyanazt jelenti-e a következő két mondat?

(a) Minden hallgatóhoz van olyan nyalóka, amelyiket szopogatott.

(b) Van olyan nyalóka, amelyiket minden hallgató szopogatott.

1.11. **Ha esik az eső, akkor nem találsz rám.** Melyik mondat jelenti ugyanezt?

(a) Ha nem esik az eső, akkor rám találsz.

(b) Ha rám találsz, akkor nem esik az eső.

Tudjuk, hogy az (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy ha $a_n > 2520$, akkor $b_n > 2520$. Mire következtethetünk abból, hogy

1.12. $a_n > 2520$?

1.13. $a_n \leq 2520$?

1.14. Egy udvarban kecskék és bolhák vannak. Azt, hogy egy bolha megcsípett egy kecskét, a $\Phi(B, K)$ formulával jelöljük. Olvassuk fel a következő állításokat, és írjuk is le őket szöveggel! Döntsük el, hogy melyik állításból melyik állítás következik!

(a) $(\forall K) \quad (\exists B) \quad \Phi(B, K)$

(b) $(\forall K) \quad (\forall B) \quad \Phi(B, K)$

(c) $(\exists K) \quad (\forall B) \quad \Phi(B, K)$

(d) $(\exists K) \quad (\exists B) \quad \Phi(B, K)$

(e) $(\exists B) \quad (\forall K) \quad \Phi(B, K)$

(f) $(\forall B) \quad (\exists K) \quad \Phi(B, K)$

Egy buliban 15 fiú és 12 lány volt. Azt, hogy egy fiú táncolt egy lánnyal, a $T(F, L)$ formulával jelöljük. Vizsgáljuk meg, hogy következik-e az A állításból a B állítás, illetve, hogy következik-e a B állításból az A állítás!

1.15. **A:** $(\forall F) \quad (\exists L) \quad T(F, L)$ **B:** $(\exists L) \quad (\forall F) \quad T(F, L)$

1.16. **A:** $(\exists F) \quad (\forall L) \quad T(F, L)$ **B:** $(\exists F) \quad (\exists L) \quad T(F, L)$

1.17. **A:** $(\forall L) \quad (\exists F) \quad T(F, L)$ **B:** $(\exists L) \quad (\forall F) \quad T(F, L)$

1.18. **A:** $(\exists L) \quad (\forall F) \quad T(F, L)$ **B:** $(\exists F) \quad (\exists L) \quad T(F, L)$

Vezessünk be jelöléseket, és írjuk fel formulákkal a következő állításokat, amelyek egy teniszbajnokságról szólnak!

1.19. Volt olyan versenyző, aki senkit nem vert meg.

1.20. Volt olyan versenyző, aki mindenkit megvert.

1.21. Minden versenyző nyert is, és veszített is játékot.

1.22. Egyetlen versenyző sem vert meg mindenkit.

1.23. Igaz-e, hogy

(a) $(x \in B) \wedge (B \subset C) \implies x \in C$, **(b)** $(x \in B) \vee (B \subset C) \implies x \in C$,

(c) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \implies A \subset C$, **(d)** $(A \subset B) \vee (B \subset C) \implies A \subset C$,

(e) $(A \in B) \implies A \subset B$? **(f)** $(A \subset B) \implies A \in B$?

Igaz-e tetszőleges A és B halmazokra, hogy

1.24. $A \backslash B = A \cap \overline{B}$,

1.25. $(A \cup B) \backslash B = A$,

1.26. $(A \backslash B) \cup B = A$,

1.27. $\overline{A} \backslash B = A \backslash \overline{B}$?

Legyenek A, B, C halmazok. Írjuk fel A, B, C és a halmazműveletek segítségével, azaz olyan jellegű formulával, mint például $(A \backslash B) \cup C$, az alábbi halmazokat!

1.28. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan egyben vannak benne.

1.29. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan háromban vannak benne.

1.30. Bizonyítsuk be a De Morgan azonosságokat:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \text{és} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

1.1.2. Gyakorló feladatok

Írjuk le a következő mondatok tagadását!

1.31. Minden medve szereti a mézet.

1.32. Van olyan tengerész, aki ismer olyan kikötőt, ahol minden kocsmában járt.

1.33. Van olyan méz, amit nem minden medve szeret.

Tagadjuk a következő mondatokat!

1.34. Ha itt a nyár, akkor meleg az idő.

1.35. Ha a nagynénikémnek kerekei lennének, akkor ő lenne a miskolci gyors.

1.36. Egy udvarban kecskék és bolhák vannak. Azt, hogy egy bolha megcsípett egy kecskét, a $\Phi(B, K)$ formulával jelöljük. Írjuk le a következő állítások tagadását formulákkal is, és szöveggel is!

(a) $(\forall K)\ (\exists B)\ \Phi(B, K)$ **(b)** $(\forall K)\ (\forall B)\ \Phi(B, K)$

(c) $(\exists K)\ (\forall B)\ \Phi(B, K)$ **(d)** $(\exists K)\ (\exists B)\ \Phi(B, K)$

(e) $(\exists B)\ (\forall K)\ \Phi(B, K)$ **(f)** $(\forall B)\ (\exists K)\ \Phi(B, K)$

Egy buliban 15 fiú és 12 lány volt. Azt, hogy egy fiú táncolt egy lánnyal, a $T(F, L)$ formulával jelöljük. Írjuk le a következő állításokat formulákkal, és vizsgáljuk meg, hogy következik-e az A állításból a B állítás, illetve, hogy következik-e a B állításból az A állítás!

1.37. **A:** Van olyan lány, aki minden fiúval táncolt.
B: Van olyan fiú, aki minden lánnyal táncolt.

1.38. **A:** Van olyan lány, aki táncolt valamelyik fiúval.
B: Van olyan fiú, aki táncolt valamelyik lánnyal.

1.39. **A:** Minden fiú táncolt valamelyik lánnyal.
B: Minden lány táncolt valamelyik fiúval.

1.40. **A:** Minden fiú táncolt minden lánnyal.
B: Van olyan lány, aki minden fiúval táncolt.

1.41. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Igaz-e tetszőleges A, B és C halmazokra, hogy

1.42. ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.

1.43. ha $a \in A$ és $A \subset B$, akkor $a \in B$.

1.44. ha $A \cup B = C$, akkor $C \setminus B = A$.

1.45. ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor $A = B$.

1.46. ha $A \cap B = C$, akkor $A \subset C$.

Legyenek A, B, és C halmazok. Írjuk fel A, B, C és a halmazműveletek segítségével, azaz olyan jellegű formulával, mint például $(A \setminus B) \cup C$, az alábbi halmazokat!

1.47. Azon elemek halmaza, amelyek A-ban benne vannak, de B-ben és C-ben nincsenek benne.

1.48. Azon elemek halmaza, amelyek A, B és C közül pontosan kettőben vannak benne.

1.49. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B halmazokra $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.2. Direkt bizonyítás, indirekt bizonyítás, teljes indukció

1.2.1. Bevezető feladatok

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket, ha a és b pozitív számok!

1.50. $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{1/a+1/b}$

1.51. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{2}{1/a+1/b}$

1.52. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$

1.53. $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Legyen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ állítások egy sorozata. Mely állításokról tudjuk biztosan, hogy igazak, illetve mely állításokról tudjuk biztosan, hogy hamisak, ha

1.54. A_1 igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

1.55. A_1 igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{2n} igaz.

1.56. A_1 igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n+1} hamis.

1.57. A_{10} hamis, és ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

1.58. A_7 igaz, és $n \geq 5$ esetén ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

1.59. A_3 igaz, és $n \geq 5$ esetén ha A_n igaz, akkor A_{n+1} igaz.

1.60. A_1 igaz és A_2 igaz, és ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

1.61. A_{10} igaz és A_{11} igaz, és ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

1.62. A_{10} igaz és A_{11} igaz, és $n > 20$ esetén ha A_n igaz, és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} igaz.

Bizonyítsuk be a következő állításokat tetszőleges pozitív egész n esetén!

1.63. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

1.64. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.65. Fejezzük ki közvetlenül n-nel az $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$ összeget! Először sejtsük meg az eredményt, majd bizonyítsuk be!

Bizonyítsuk be a következő állításokat! A feladatokban n pozitív egész számokat jelöl.

1.66. $2^n > n^2$, ha $n > 4$

1.67. $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \geq 1$

1.68. $\sqrt{n} \leq 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1.69. **Állítás:** Ha $\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, akkor minden pozitív egész szám 1.
Bizonyítás teljes indukcióval: Az állítás $n = 1$-re igaz. Most induljunk ki abból, hogy $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Ha $n \geq 2$, akkor írjuk fel az előbbi azonosságot n helyett $(n-1)$-gyel:
$1 + 2 + \ldots + n - 1 = \dfrac{(n-1)n}{2}$.
Adjunk mindkét oldalhoz 1-et: $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{(n-1)n}{2} + 1$.
Tehát $\dfrac{(n-1)n}{2} + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, amiből következik, hogy $n = 1$.

1.70. **Állítás:** Minden ló egyszínű.
Bizonyítás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely n ló egyszínű. Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy igaz n-re, és ebből fogjuk $n+1$-re belátni: adott $n+1$ ló közül az indukciós feltevés miatt az $1., 2., \ldots, n.$ is egyszínű és a $2., \ldots, n., (n+1).$ is egyszínű, tehát mind az $n+1$ ló egyszínű.

Legyen u_n a Fibonacci-sorozat n-edik tagja, azaz

$$u_0 = 0,\, u_1 = 1, \text{ és } u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

1.71. u_n és u_{n+1} relatív prímek!

1.72. $u_n < 1,7^n$.

1.73. Kivágjuk egy sakktáblából az egyik átlójának két végén levő négyzeteket (az A1 és a H8 mezőket). Le lehet-e fedni a megmaradó sakktáblát 31 darab 2×1-es lappal (dominóval)? (Egy lap 2 mezőt tud lefedni.)

1.74. Bizonyítsuk be, hogy két racionális szám összege racionális!

1.75. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális!

1.76. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $3 + \sqrt{2}$ **(b)** $3\sqrt{2}$

irracionális!

1.77. Lehet-e

(a) két irracionális szám összege racionális?

(b) két racionális szám hányadosa irracionális?

1.78. Igaz-e, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális?

1.79. **Állítás:** Az 1 a legnagyobb szám.
Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy nem az 1 a legnagyobb szám, hanem A. Ekkor $A > 1 > 0$, továbbá $A > A^2$. Az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív A-val osztva azt kapjuk, hogy $1 > A$, ami ellentmond az indirekt feltevésnek, tehát mégis az 1 a legnagyobb szám.

1.80. Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak van 100-nál nagyobb tagja!

1.2.2. Gyakorló feladatok

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket, ha a és b pozitív számok!

1.81. $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

1.82. $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{1/a + 1/b}$

Legyen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ állítások egy sorozata. Mely állításokról tudjuk biztosan, hogy igazak, illetve mely állításokról tudjuk biztosan, hogy hamisak, ha

1.83. A_1 igaz, és ha A_n igaz, akkor A_{n-1} igaz.

1.84. A_1 igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n-1} hamis.

1.85. Fejezzük ki közvetlenül n-nel az $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$ összeget! Először sejtsük meg az eredményt, majd bizonyítsuk is be!

Bizonyítsuk be a következő állításokat! A feladatokban n egész számokat jelöl.

1.86. $2^n > n^3$, ha $n > 9$

1.87. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$

Legyen u_n a Fibonacci-sorozat n-edik tagja, azaz $u_0 = 0, u_1 = 1$, és $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Bizonyítsuk be, hogy

1.88. $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}$, ha $n \geq 1$.

1.89. $u_n > 1,5^{n-1}$, ha $n \geq 6$.

1.90. Legyen $a_1 = 0, a_2 = 1$ és $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$. Határozzuk meg a_{101} értékét!

1.91. Egy 5×5-ös sakktábla minden mezőjén áll egy bolha. Amikor az óra éjfélt üt, minden bolha átugrik valamelyik oldalszomszédos mezőre. Tudnak-e úgy ugrani, hogy az ugrás után is minden mezőn 1 bolha legyen?

Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak!

1.92. $\sqrt{3}$

1.93. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

1.94. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

1.95. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

1.96. Legyen $a_1 = 0,9$ és $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak van $\frac{1}{1000}$-nél kisebb tagja!

1.3. Nevezetes közepek, becslések

1.3.1. Bevezető feladatok

1.97. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok számtani, mértani és harmonikus közepe a számok legkisebbike és legnagyobbika közé esik!

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $a + b + c = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke maximális legyen:

1.98. abc,

1.99. a^3b^2c.

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $abc = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke minimális legyen:

1.100. $a + b + c$,

1.101. $3a + 2b + c$.

1.102. Egy kereskedőnek nem pontos a kétkarú mérlege, mert a karok hossza nem egyenlő. Miután tudja ezt, minden vásárlónál az áru egyik felét a mérleg egyik serpenyőjében, a másik felét a mérleg másik serpenyőjében méri, gondolván, hogy ezzel kiküszöböli a mérleg pontatlanságát. Valóban ez a helyzet?

1.103. Melyik az egységkörbe írható maximális területű téglalap?

1.104. Mennyi a maximuma a $g(x) = x(1 - x)^3$ függvénynek a $[0, 1]$ intervallumon?

Bizonyítsuk be, hogy van olyan pozitív N egész szám, amelyre teljesül, hogy minden $n > N$ esetén

1.105. $0,001n^5 - 200 > 1000n^4$,

1.106. $0,001n^5 + 3n^4 - 200n^3 + 100 > 1000n^4 + 2000n^3 + 3000n^2 + 4$,

1.107. $0,001n^5 - 200 > 1000n^3 + 10000\sqrt{n} + 3$,

1.108. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0,001$.

Van-e a következő sorozatoknak 100-nál nagyobb tagja?

1.109. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}}{n}$

1.110. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}}{n^2}$

1.111. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}}{1+2+\dots+n}$

Bizonyítsuk be, hogy van olyan pozitív n egész szám, amelyre

1.112. $1,0001^n > 1000$,

1.113. $0,999^n < \dfrac{1}{1000}$,

1.114. $1,01^n > n^2$,

1.115. $\sqrt[n]{2} < 1,00001$,

1.116. $\sqrt[n]{0,0001} > 0,9$,

1.117. $\sqrt[n]{n} < 1,0001$.

1.118. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ rekurzióval megadott sorozat monoton nő!

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív ε-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $n > N$, akkor

1.119. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$,

1.120. $\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1} < \varepsilon$,

1.121. $\sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon$,

1.122. $\sqrt[n]{0,0001} > 1 - \varepsilon$.

Bizonyítsuk be, hogy minden $K \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $n > N$, akkor

1.123. $\sqrt{n} > K$,

1.124. $n^5 - 1000n^4 > K$,

1.125. $n^5 - n\sqrt{n} > K$,

1.126. $n^5 - 1000n^4 - n\sqrt{n} - 2000 > K$.

1.3.2. Gyakorló feladatok

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $a + b + c = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke maximális legyen:

1.127. a^2bc,

1.128. $\dfrac{abc}{ab+bc+ac}$.

Tudjuk, hogy $a, b, c > 0$ és $abc = 18$. Határozzuk meg a, b és c értékét úgy, hogy a következő kifejezések értéke minimális legyen:

1.129. $2a+b+c$,

1.130. $a^2+b^2+c^2$.

1.131. Egy motorcsónak motorja a csónakot állóvízben v sebességgel hajtja. A csónak az u sebességű folyóban s utat tesz meg a folyás irányában, majd visszamegy a kiindulási helyéhez. Mennyi lesz az átlagsebessége a teljes úton v-hez képest: v-vel egyenlő, v-nél nagyobb vagy v-nél kisebb?

1.132. Határozzuk meg az $x^2(1-x)$ függvény legnagyobb értékét a $[0, 1]$ zárt intervallumon.

1.133. Melyik az egységgömbbe írható maximális térfogatú egyenes körhenger?

Bizonyítsuk be, hogy van olyan pozitív N egész szám, amelyre teljesül, hogy minden $n > N$ esetén

1.134. $0,1n^5+30n^4-20n^3+10 > 1000n^4+2000n^3+\dfrac{1}{n}$,

1.135. $\sqrt{n+10}-\sqrt{n+1} < 0,001$.

1.136. Adjunk meg olyan N számot, amelyre igaz, hogy ha $n > N$, akkor

$$\frac{1}{n^5+4n^3+2n^2+1} < \frac{1}{1000}.$$

Hány megoldása van a feladatnak?

Bizonyítsuk be, hogy van olyan pozitív n egész szám, amelyre

1.137. $0,9^n < \dfrac{1}{100}$,

1.138. $\sqrt[n]{2} < 1,01$,

1.139. $\sqrt[n]{0,1} > 0,9$.

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív ε-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $n > N$, akkor

1.140. $\dfrac{1}{n} < \varepsilon,$ **1.141.** $\dfrac{1}{n^2 + \sqrt{n} + 1} < \varepsilon,$ **1.142.** $\dfrac{n+1}{n^2 + \sqrt{n} + 1} < \varepsilon.$

Bizonyítsuk be, hogy minden $K \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $n > N$, akkor

1.143. $a_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n} > K,$

1.144. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[3]{n}}{n} > K,$

1.145. $a_n = \dfrac{n\sqrt{1} + n\sqrt{2} + n\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}}{1 + 2 + \cdots + n} > K.$

1.146. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - a_n}$ rekurzióval megadott sorozat monoton nő!

1.4. Valós számok, számhalmazok

1.4.1. Bevezető feladatok

1.147. Bizonyítsuk be, hogy a

(a) $\{0, 1\}$ halmaz a $\mod 2$-vel vett műveletekkel testet alkot,

(b) $\{0, 1, 2\}$ halmaz a $\mod 3$-mal vett műveletekkel testet alkot,

(c) A $\{0, 1, 2, 3\}$ halmaz a $\mod 4$-gyel vett műveletekkel nem alkot testet!

1.148. Bizonyítsuk be az axiómák alapján, hogy az a, b valós számokra igaz, hogy

(a) ha $a < b$, akkor $-a > -b$,

(b) ha a és b pozitív, és $a < b$, akkor $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

1.149. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós számokra

(a) $|a| + |b| \geq |a + b|$

(b) $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

(c) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

1.150. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \dots a_n$ valós számokra igaz, hogy
$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_n|$

1.151. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív a valós számhoz van olyan pozitív egész n, amelyre teljesül, hogy $\frac{1}{n} < a$.

1.152. Bizonyítsuk be az Archimédeszi axiómából, hogy $(\forall b, c < 0)$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $nb < c$!

1.153. Bizonyítsuk be, hogy bármely két különböző valós szám között van irracionális szám!

1.154. Szemléltessük a következő számhalmazokat számegyenesen! Döntsük el, hogy melyik intervallum, és melyik nem az! Az intervallumok esetében döntsük el, hogy melyik zárt, melyik nyílt, és melyik se nem zárt, se nem nyílt!

(a) $A = \{1, 2, 3\}$

(b) $B = \{5, 6\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 6\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 6\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 6\}$

(f) $F = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x < 6\}$

1.155. Legyen $H_1 = \{h \in \mathbb{R} : -3 < h \leq 1\}$ és $H_2 = \{h \in \mathbb{R} : -3 \leq h < 1\}$.
Melyik állítás igaz, ha $H = H_1$ vagy $H = H_2$?

(a) $\forall x \in H \; \exists y \in H \; (y < x)$

(b) $\forall y \in H \; \exists x \in H \; (y < x)$

(c) $\exists x \in H \; \forall y \in H \; (y \leq x)$

(d) $\exists y \in H \; \forall x \in H \; (y \leq x)$

1.156. Határozzuk meg a következő intervallumsorozatok metszetét! (Például rajz segítségével sejtsük meg a metszetet! Ha a sejtés szerint a metszet M, akkor bizonyítsuk be, hogy $\forall x \in M$ esetén teljesül, hogy $\forall n \; x \in I_n$, továbbá ha $y \notin M$ akkor $\exists k \; y \notin I_k$. (Itt k és n pozitív egész számok.)

(a) $I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$

(b) $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

(c) $I_n = \left[2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right]$

(d) $I_n = \left(2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right)$

(e) $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$

(f) $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

(g) $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$

(h) $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$

1.157. Melyik állítás igaz? (A választ mindig indokoljuk!)

(a) Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok zártak.

(b) Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor az intervallumok nyíltak.

(c) Egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont.

(d) Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nyílt.

(e) Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nem zárt.

(f) Ha egy zárt intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok egymásba vannak skatulyázva.

1.158. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont?

1.159. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete nem üres?

1.160. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete üres?

1.161. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete valódi intervallum (nem csak egy pont)?

1.162. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete valódi intervallum?

1.163. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete valódi nyílt intervallum?

1.164. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete valódi nyílt intervallum?

1.165. A valós számok axiómái közül melyek teljesülnek és melyek nem a racionális számok halmazára (a szokásos műveletekkel és rendezéssel)?

1.166. Bizonyítsuk be, hogy bármely két valós szám között van véges tizedes tört!

1.167. Mi a kapcsolat a véges tizedestört alakban felírható számok halmaza és a racionális számok halmaza között?

1.168. Bizonyítsuk be, hogy egy valós szám tizedestört-alakja akkor és csak akkor periodikus, ha a szám racionális.

1.169. Fordítsuk le a végtelen tizedestörtékről tanultakat kettes számrendszerre, azaz definiáljuk a véges és végtelen bináris (kettedes) törteket és mondjuk ki a tételeink megfelelőit!

1.170. Ellenőrizzük, hogy a Cantor-axióma állítása nem marad igaz, ha bármelyik feltételét elhagyjuk!

1.171. Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy alulról korlátosak-e, felülről korlátosak-e, korlátosak-e, és hogy van-e legkisebb, illetve legnagyobb elemük?

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 73\}$ **(b)** $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 73\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq \sqrt{2}\}$ **(d)** $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$

Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy alulról korlátosak-e, felülről korlátosak-e, korlátosak-e, és hogy van-e legkisebb illetve legnagyobb elemük?

1.172. prímszámok halmaza

1.173. pozitív számok halmaza

1.174. $[-5, -2)$

1.175. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.176. Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

(a) $\left\{\sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$ **(b)** $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$ **(d)** $\left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.177. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?

(a) H alulról nem korlátos. **(b)** H-nak nincs legkisebb eleme.

(c) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in H)\ y < x.$ **(d)** $(\forall y \in H)\ (\exists x \in H)\ y < x.$

1.178. Van-e olyan olyan nem üres valós számhalmaz, amelyik felülről korlátos, de nincs legnagyobb eleme?

1.179. Adjunk példát olyan nem üres valós számhalmazra, amelyik korlátos, de nincs legkisebb eleme!

1.180. Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz nem üres. Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: H-nak nincs minimuma. **Q:** $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\ (\exists b \in H) \quad b < a$

1.181. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között, azaz melyikből következik a másik?

P: Az A halmaz véges (azaz véges sok eleme van).
Q: Az A halmaz korlátos.

Írjuk fel logikai jelekkel az alábbi állításokat!

1.182. Az A halmaz korlátos.

1.183. Az A halmaz alulról nem korlátos.

1.184. Egy számhalmaznak hány maximuma, illetve hány felső korlátja lehet?

1.185. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között, azaz melyikből következik a másik?

P: Az A halmaznak van legkisebb eleme. **Q:** Az A halmaz alulról korlátos.

Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

1.186. $[1, 2]$

1.187. $(1, 2)$

1.188. $\mathbb{Q}$

1.189. $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+ \right\}$

1.190. Tudjuk, hogy H-nak nincs c-nél kisebb felső korlátja. Következik-e ebből, hogy $\sup H = c$?

1.4.2. Gyakorló feladatok

1.191. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számokra igaz, hogy

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| .$$

1.192. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mit jelentenek a következő állítások?

(a) $\forall x \in H \ \exists y \in H \ (y < x)$

(b) $\forall y \in H \ \exists x \in H \ (y < x)$

(c) $\exists x \in H \ \forall y \in H \ (y \leq x)$

(d) $\exists y \in H \ \forall x \in H \ (y \leq x)$

1.193. Van-e olyan $a_1, a_2, \ldots$ számsorozat, amelyre az $\{a_1, a_2, \ldots\}$ halmaz korlátos, de nincs se maximuma, se minimuma?

1.194. Írjuk fel logikai jelekkel a következő állítást: „Az A halmaznak nincs legkisebb eleme.”

Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

1.195. $\left\{\dfrac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.196. $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

1.197. Tudjuk, hogy c felső korlátja H-nak. Következik-e ebből, hogy $\sup H = c$?

2. Sorozatok

2.1. A határérték fogalma, konvergens sorozatok, divergens sorozatok

2.1.1. Bevezető feladatok

Legyen az (a_n) sorozat a következőképp megadva: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. A feladatokban szereplő n és n_0 jelek pozitív egész számokat jelölnek.

2.1. Adjunk meg olyan n_0 számot, hogy $\forall n > n_0$ esetén teljesüljön, hogy

(a) $|a_n - 1| < 0,1$, **(b)** $|a_n - 1| < 0,01$.

2.2. Van-e olyan n_0 szám, hogy $\forall n > n_0$ esetén teljesül, hogy $|a_n - 2| < 0,001$?

2.3. Igaz-e, hogy

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$? **(b)** $\exists n_0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$?

(c) $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$? **(d)** $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| > \varepsilon)$?

(e) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \le n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$? **(f)** $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \le n_0\ (|a_n - 1| > \varepsilon)$?

Keressünk olyan N számot, hogy $\forall n > N$ esetén teljesüljön, hogy

2.4. $1,01^n > 1000$; **2.5.** $0,9^n < \frac{1}{100}$.

Mutassuk meg, hogy van olyan n_0 szám, amire igaz, hogy minden $n > n_0$ esetén

2.6. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0,01,$

2.7. $\sqrt{n+7} - \sqrt{n+3} < 0,01.$

2.8. Igaz-e, hogy b pontosan akkor határértéke az (a_n) sorozatnak, ha

(a) bármely $\varepsilon > 0$-ra az a_n sorozatnak végtelen sok tagja van ε-nál közelebb b-hez?

(b) bármely $\varepsilon > 0$-ra az a_n sorozatnak csak véges sok tagja van b-től legalább ε távolságra?

(c) van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az a_n sorozatnak végtelen sok tagja van ε-nál közelebb b-hez?

(d) van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre az a_n sorozatnak végtelen sok tagja van b-től legalább ε távolságban?

Melyik állításból következik, hogy $a_n \to \infty$?

2.9. $\forall K$ esetén a (K, ∞) intervallumon kívül az a_n sorozatnak csak véges sok tagja van.

2.10. $\forall K$ eseten a (K, ∞) intervallumban az a_n sorozatnak végtelen sok tagja van.

2.11. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: Az (a_n) sorozat szigorúan monoton nő. **Q:** Az (a_n) sorozat tart a végtelenhez.

Lehet-e az a_n sorozat határértéke $-\infty$, ∞ vagy egy valós szám, ha

2.12. a sorozatnak végtelen sok 3-nál nagyobb tagja van?

2.13. a sorozatnak végtelen sok 3-nál kisebb tagja van?

2.14. Van-e olyan oszcillálva divergens sorozat, amelyik

(a) korlátos **(b)** nem korlátos?

2.15. Egy sorozatnak végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja van. Lehet-e a sorozat konvergens?

A következő, végtelenbe tartó sorozatokhoz keressünk küszöbindexet:

2.16. $n - \sqrt{n}$,

2.17. $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}$,

2.18. $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n}$,

2.19. $\dfrac{n^2-10n}{10n+100}$,

2.20. $\dfrac{2^n}{n}$,

2.21. $\dfrac{n!}{2^n}$.

2.22. Konvergensek-e vagy divergensek-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

(a) $a_n = \begin{cases} 3, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 4, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

(b) $a_n = \begin{cases} 3n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 4n^2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

2.23. Bizonyítsuk be, hogy az $\dfrac{1}{n}$ sorozat nem tart 7-hez!

2.24. Bizonyítsuk be, hogy a $(-1)^n$ sorozat divergens!

2.1.2. Gyakorló feladatok

Legyen az (a_n) sorozat a következőképp megadva: $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. A feladatokban szereplő n és n_0 jelek pozitív egész számokat jelölnek.

2.25. Adjunk meg olyan n_0 számot, hogy $\forall n > n_0$ esetén teljesüljön, hogy

(a) $|a_n - 1| < 0,1$,

(b) $|a_n - 1| < 0,01$.

2.26. Van-e olyan n_0 szám, hogy $\forall n > n_0$ esetén teljesül, hogy $|a_n - 2| < 0,001$?

2.27. Igaz-e, hogy

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$?

(b) $\exists n_0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$?

(c) $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$?

(d) $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (|a_n - 1| > \varepsilon)$?

(e) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \le n_0\ (|a_n - 1| < \varepsilon)$?

(f) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \le n_0\ (|a_n - 1| > \varepsilon)$?

Keressünk olyan N számot, hogy $\forall n > N$ esetén teljesüljön, hogy

2.28. $\sqrt[n]{2} < 1,01$.

2.29. $\sqrt[n]{n} < 1,0001$.

2.30. Mutassuk meg, hogy van olyan n_0 szám, amire igaz, hogy minden $n > n_0$ esetén $\sqrt{n^2+5} - n < 0,01$.

2.31. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Melyik állítás következik ebből? Melyik állításból következik, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

(a) Az (a_n) sorozatnak nincs legnagyobb tagja.

(b) Az (a_n) sorozatnak van legkisebb tagja.

(c) A $(3,\infty)$ intervallumon kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van.

(d) $\forall K$ esetén a (K,∞) intervallumon kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van.

(e) A $(3,\infty)$ intervallumban az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van.

(f) $\forall K$ esetén a (K,∞) intervallumban az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van.

Lehet-e az a_n sorozat határértéke $-\infty$, ∞ vagy egy valós szám, ha

2.32. a sorozatnak van legnagyobb tagja?

2.33. a sorozatnak nincs legnagyobb tagja?

2.34. Konvergensek-e vagy divergensek-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

(a) $a_n = \begin{cases} 3, & \text{ha } n \le 100 \\ 4, & \text{ha } n > 100 \end{cases}$

(b) $a_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

2.2. Határérték és műveletek, határérték és rendezés

2.2.1. Bevezető feladatok

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, és adjunk meg egy ε-tól függő küszöbindexet:

2.35. $\dfrac{(-1)^n}{n}$,

2.36. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

2.37. $\dfrac{n}{n+1}$,

2.38. $\dfrac{5n-1}{7n+2}$,

2.39. $\dfrac{n+\frac{1}{n}}{n+1}$,

2.40. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,

2.41. $\sqrt{n^2+1}-n$,

2.42. $\dfrac{1+\cdots+n}{n^2}$.

2.43. Legyen $a_n = \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ (n tagú az összeg). Mivel a tagokat alkotó sorozatok 0-hoz tartanak, ezért az a_n sorozat tart 0-hoz. Másrészt minden n-re $a_n = n\cdot\dfrac{1}{n} = 1$, ezért $a_n \to 1$. Melyik következtetés a hibás, és mi a hiba benne?

2.44. Tudjuk, hogy $1+\dfrac{1}{n}\to 1$, továbbá $1^n = 1$, ezért $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to 1$.

Másrészt a **Bernoulli-egyenlőtlenség** felhasználásával bizonyíthatjuk, hogy $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 2$,

tehát $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ határértéke nem lehet kisebb 2-nél.

Melyik következtetés a hibás, és mi a hiba benne?

2.45. Adjunk példát olyan (a_n) és (b_n) sorozatokra, amelyekre teljesül, hogy $\dfrac{a_n}{b_n}\to 1$ de $a_n-b_n \not\to 0$

2.46. Abból, hogy $a_n^2 \to a^2$ következik-e, hogy $a_n \to a$?
És abból, hogy $a_n^3 \to a^3$ következik-e, hogy $a_n \to a$?

Mi a következő állításpárok logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

2.47. **P:** (a_n) konvergens és (b_n) konvergens **Q:** (a_n+b_n) konvergens

2.48. **P:** $a_n+b_n\to\infty$ **Q:** $a_n\to\infty$ és $b_n\to\infty$

2.49. **P:** $a_n+b_n\to\infty$ **Q:** $a_n\to\infty$ vagy $b_n\to\infty$

2.50. **P:** $a_n\cdot b_n\to 0$ **Q:** $a_n\to 0$ vagy $b_n\to 0$

2.51. **P:** (a_n) és (b_n) korlátos **Q:** $(a_n + b_n)$ korlátos

2.52. **P:** (a_n) és (b_n) korlátos **Q:** $(a_n \cdot b_n)$ korlátos

2.53. Mutassunk példákat az $(a_n + b_n)$ sorozat lehetséges viselkedésére, ha
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

2.54. Mutassunk példákat az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat lehetséges viselkedésére, ha
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

2.55. Mutassunk példákat az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat lehetséges viselkedésére, ha
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

2.56. Tegyük fel, hogy a b_n sorozat egyetlen tagja sem 0. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: $b_n \to \infty$ **Q:** $\dfrac{1}{b_n} \to 0$

2.57. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$ **Q:** $a_n - b_n \to 0$

2.58. Tegyük fel, hogy $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$ **Q:** $a_n - b_n \to 0$

2.59. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra teljesül, hogy $\dfrac{a_n - 5}{a_n + 3} \to \dfrac{5}{13}$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \to 10$.

2.60. Igaz-e, hogy ha $(a_n \cdot b_n)$ konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n) is divergens?

2.61. Igaz-e, hogy ha (a_n / b_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n) is divergens?

Tegyük fel, hogy az (a_n) és (b_n) sorozatnak van határértéke. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?

2.62. **P:** Minden elég nagy n-re $a_n < b_n$. **Q:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2.63. **P:** Minden elég nagy n-re $a_n \le b_n$. **Q:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Melyik állításokból következik, hogy az (a_n) sorozatnak van határértéke? Melyik állításokból következik, hogy (a_n) konvergens? Melyik állításokból következik, hogy (a_n) divergens?

2.64. (b_n) konvergens és $a_n > b_n$ minden elég nagy n-re.

2.65. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ és $a_n > b_n$ minden elég nagy n-re.

2.66. (b_n) és (c_n) konvergens és $b_n \le a_n \le c_n$ minden elég nagy n-re.

2.67. Bizonyítsuk be, hogy ha $a > 1$, akkor $a^n \to \infty$.

2.68. Bizonyítsuk be, hogy ha $a \le -1$, akkor a^n oszcillálva divergens!

2.69. Adjunk példát olyan (a_n) sorozatra, amelyikre teljesül, hogy

(a) $\sqrt[n]{a_n} \to 2$ **(b)** $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{1}{2}$ **(c)** $\sqrt[n]{a_n} \to 0$ **(d)** $\sqrt[n]{a_n} \to \infty$

2.70. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sqrt[n]{a_n} \to 2$, akkor $a_n \to \infty$.

2.71. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{1}{2}$, akkor $a_n \to 0$.

2.72. Van-e olyan (a_n) sorozat, amelyikre igaz, hogy

(a) $a_n \to \infty$ és $\sqrt[n]{a_n} \to 1$?

(b) $a_n \to 0$ és $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{1}{2}$?

(c) $a_n \to \infty$ és $\sqrt[n]{a_n} \to 3$?

(d) $a_n \to \infty$ és $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{1}{2}$?

(e) $a_n \to 3$ és $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{1}{2}$?

(f) $a_n \to 3$ és $\sqrt[n]{a_n} \to \infty$?

Konvergensek-e vagy divergensek-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

2.73. $\sqrt[n]{2^n+3^n}$

2.74. $\sqrt[n]{7+(-1)^n}$

2.75. $\sqrt[n]{2^n-n}$

2.76. $\sqrt[n]{2^n+n^2}$

2.77. $\sqrt[n]{2^n-n^2}$

2.78. $\sqrt[n]{\dfrac{2^n+n^2+1}{3^n+n^3+1}}$

2.2.2. Gyakorló feladatok

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, és adjunk meg egy ε-tól függő küszöbindexet:

2.79. $\dfrac{2n^6+3n^5}{7n^6-2}$

2.80. $\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}-2n$

2.81. Adjunk példát arra, hogy $a_n-b_n\to 0$ de $\dfrac{a_n}{b_n}\not\to 1$.

2.82. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n\to a>0$, akkor $\sqrt{a_n}\to\sqrt{a}$.

2.83. Mutassunk példákat az $\dfrac{a_n}{b_n}$ sorozat lehetséges viselkedésére, ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$.

2.84. Tegyük fel, hogy $a_n\to\infty$ és $b_n\to\infty$. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: $\dfrac{a_n}{b_n}\to 1$ **Q:** $a_n-b_n\to 0$

2.85. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-1}{a_n+1}=0$, akkor (a_n) konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

2.86. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak van határértéke. Mi a következő állítások logikai kapcsolata? **P:** Minden elég nagy n-re $\dfrac{1}{n}\le a_n$ **Q:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n>0$

Melyik állításokból következik, hogy az (a_n) sorozatnak van határértéke? Melyik állításokból következik, hogy (a_n) konvergens? Melyik állításokból következik, hogy (a_n) divergens?

2.87. $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ és $a_n > b_n$ minden elég nagy n-re.

2.88. $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ és $a_n < b_n$ minden elég nagy n-re.

2.89. Korlátos-e felülről a $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n^2}$ sorozat?

Konvergensek-e vagy divergensek-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

2.90. $\sqrt[n]{3^n - 2^n}$

2.91. $\dfrac{1-2+3-\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$

2.3. Monoton sorozatok, részsorozatok

2.3.1. Bevezető feladatok

2.92. Legyen (a_n) és (b_n) két monoton sorozat. Mit tudunk mondani a monotonitás szempontjából az $(a_n + b_n)$ sorozatról?

2.93. Legyen $a_1 = 1$, és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Bizonyítsuk be, hogy az (a_n) sorozat monoton növő!

2.94. Legyen $a_1 = \dfrac{1}{2}$, és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden tagja pozitív, továbbá, hogy a sorozat monoton csökkenő!

2.95. Legyen $a_1 = 0,9$, és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden tagja pozitív, továbbá, hogy a sorozat monoton csökkenő! Mutassuk meg, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre igaz, hogy $a_n < 10^{-6}$, és adjunk példát ilyen n számra!

Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

2.96. **P:** Az (a_n) sorozat monoton nő. **Q:** Az (a_n) sorozat végtelenhez tart.

2.97. **P:** Az (a_n) sorozat monoton csökken. **Q:** Az (a_n) sorozat mínusz végtelenhez tart.

Határozzuk meg a következő rekurzív sorozatok határértékét, ha van! A rekurzív képletekben $n \geq 1$.

2.98. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n^2}$

2.99. $a_1 = 1,5, \quad a_{n+1} = -a_n + 1$

2.100. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + \dfrac{5}{a_n}}{2}$

2.101. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + \dfrac{5}{a_n}}{2}$

2.102. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{a_n}\right)$

2.103. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$

Korlátosak-e, illetve monotonok-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

2.104. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

2.105. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$

2.106. $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

Mi a következő állításpárok logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

2.107. **P:** (a_{2n}), (a_{2n+1}) és (a_{3n}) konvergens **Q:** (a_n) konvergens

2.108. **P:** $a_{2n} \to 5$ **Q:** $a_n \to 5$

Döntsük el az alábbi sorozatokról, hogy van-e konvergens részsorozatuk!

2.109. $(-1)^n$

2.110. $\dfrac{1}{n}$

2.111. $\sqrt{n}$

2.112. $(-1)^n \dfrac{1}{n}$

2.3.2. Gyakorló feladatok

2.113. Legyen (a_n) és (b_n) két monoton sorozat. Mit tudunk mondani a monotonitás szempontjából az $(a_n \cdot b_n)$ sorozatról?

2.114. Legyen $a_1 > 0$, és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1,1$. Mutassuk meg, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre igaz, hogy $a_n > 10^6$, és adjunk példát ilyen n számra!

2.115. Legyen $a_1 = a > 0$ tetszőleges, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right)$. Mutassuk meg, hogy $a_n \to \sqrt{a}$.

Határozzuk meg a következő rekurzív sorozatok határértékét, ha van! A rekurzív képletekben $n \geq 1$.

2.116. $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

2.117. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^3 + 1}$

2.118. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{3}{a_n}\right)$

2.119. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$

2.120. Korlátos-e, illetve monoton-e az $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

2.121. Mi a következő állításpárok logikai kapcsolata?

P: (a_{2n}) és (a_{2n+1}) konvergens **Q:** (a_n) konvergens

2.122. Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozatnak nincs konvergens részsorozata, akkor $|a_n| \to \infty$.

2.4. Nagyságrendek, nevezetes sorozatok

2.4.1. Bevezető feladatok

2.123. Bizonyítsuk be, hogy $n! \prec n^n$ igaz!

2.124. Tegyük az alábbi sorozatokat nagyságrend szerint sorba!

$(n^7), \qquad (n^2 + 2^n), \qquad (100\sqrt{n}), \qquad \left(\dfrac{n!}{10}\right)$

2.125. Illesszük be az $n \prec n^2 \prec n^3 \prec \cdots \prec 2^n \prec 3^n \prec \cdots \prec n! \prec n^n$ sorba a megfelelő helyre $\sqrt{n}$-et, $\sqrt[3]{n}$-et,..., $\sqrt[k]{n}$-et!

Konvergensek-e vagy divergensek-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

2.126. $\dfrac{2^n}{3^n}$

2.127. $\dfrac{3^n}{2^n}$

2.128. $(1,1)^n$

2.129. $\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n$

2.130. $\dfrac{1}{(1,2)^n + 1}$

2.131. $\dfrac{n+2}{\sqrt{n} - 3^{-n}}$

2.132. $\dfrac{3^n}{(-3)^n}$

2.133. $\dfrac{n^{100}}{100^n}$

2.134. $\dfrac{10^n}{n!}$

2.135. $\dfrac{n^3}{(1,2)^n}$

2.4.2. Gyakorló feladatok

2.136. Keressük meg az alábbi sorozatok között az összes aszimptotikusan egyenlő párt!

$$(n!), \quad (n^n), \quad (n! + n^n), \quad (\sqrt{n}), \quad (\sqrt[n]{n}), \quad (\sqrt{n+1}), \quad (\sqrt[n]{2})$$

Konvergensek-e vagy divergensek-e a következő sorozatok? Határozzuk meg a határértékeket, ha vannak!

2.137. $\dfrac{(3,01)^n}{2^n + 3^n}$

2.138. $\dfrac{n! - 3^n}{n^{10} - 2^n}$

2.139. $(0,99)^n n^2$

2.140. $\dfrac{(1,01)^n}{n^2}$

2.141. $\dfrac{3^n - \sqrt{n} + n^{10}}{2^n - \sqrt[n]{n} + n!}$

2.142. $\sqrt[n]{2^n + n - 1}$

2.143. $\dfrac{3^{n+6} + n^2}{2^{n+3}}$

2.144. $\dfrac{4^n + 5^n}{6^n + (-7)^n}$

3. Végtelen sorok

3.1. Végtelen sorok konvergenciája

3.1.1. Bevezető feladatok

Írjuk fel a következő sorok n-edik részletösszegét! Határozzuk meg a részletösszegek határértékét! Adjuk meg a sorok összegét!

3.1. $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{10^k}+\cdots$

3.2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\cdots$

3.3. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)\cdot(3k+1)}+\cdots$

Határozzuk meg a következő sorok összegét, ha konvergensek!

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{9^n}$

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{9^n}$

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4^n}{(-9)^n}$

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{4^n+5^n}$

3.8. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ sor?

Igaz-e, hogy ha

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergens, akkor $a_n\to 0$?

3.10. $a_n \to 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens?

3.11. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $a_n \to 1$?

Hova tartanak a következő sorok tagjaiból álló sorozatok? Konvergensek-e a sorok?

3.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

3.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

3.1.2. Gyakorló feladatok

Írjuk fel a következő sorok n-edik részletösszegét! Határozzuk meg a részletösszegek határértékét! Adjuk meg a sorok összegét!

3.18. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots$

3.19. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+3)} + \cdots$

Határozzuk meg a következő sorok összegét, ha konvergensek!

3.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{9^n}$

3.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(-3)^n}$

3.22. Igaz-e, hogy ha $a_n \to 0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens?

Hova tartanak a következő sorok tagjaiból álló sorozatok? Konvergensek-e a sorok?

3.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$

3.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

3.2. Pozitív tagú sorok konvergenciakritériumai

3.2.1. Bevezető feladatok

Döntsük el a majoráns kritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

3.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Döntsük el a hányadoskritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

3.29. Tegyük fel, hogy minden pozitív egész n-re $a_n > 0$. Mit állíthatunk a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját illetően biztosan, ha

(a) $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, **(b)** $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, **(c)** $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$?

Döntsük el a gyökkritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

3.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n}\right)^n$

3.32. Tegyük fel, hogy $b_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$. Mit állíthatunk a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját illetően biztosan, ha

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens. **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens.

Döntsük el ismert sorok nagyságrendjével való összehasonlítással, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^2+3}$

3.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3n^9}}{\sqrt{n^4}+3}$

Döntsük el, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+\sqrt{n}}$

3.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

3.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

3.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

3.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

3.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^n$

3.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

3.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

3.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$

3.44. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

3.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

3.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

3.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+200}{2n+7}\right)^n$

3.49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+3}{n^3-n+2}$

3.50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

3.51. Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, valamint c egy valós szám. Következnek-e ebből az alábbi állítások?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) = AB$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (b_n \neq 0)$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |A|$

3.2.2. Gyakorló feladatok

Döntsük el a majoráns kritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

3.53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

Döntsük el a hányadoskritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

3.55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Döntsük el a gyökkritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$

3.57. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

Döntsük el ismert sorok nagyságrendjével való összehasonlítással, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^4+3n}$

3.59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^6}}{n^2+3}$

Döntsük el, hogy konvergensek-e a következő sorok!

3.60. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

3.61. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

3.62. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n-2^n}$

3.63. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)$

3.3. Feltételes és abszolút konvergencia

3.3.1. Bevezető feladatok

3.64. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagokból álló sorozat monoton csökken, akkor a sor konvergens?

3.65. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagok előjele váltakozik, és a tagok abszolút értékeiből álló sorozat monoton csökken, akkor a sor konvergens?

3.66. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagokból álló sorozat monoton csökkenve 0-hoz tart, akkor a sor konvergens?

3.67. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagok előjele váltakozik, és a tagok abszolút értékeiből álló sorozat 0-hoz tart, akkor a sor konvergens?

Melyik sor Leibniz-sor? Melyik sor konvergens?

3.68. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$

3.69. $1-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$

3.70. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$

3.71. $1-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 9}-\frac{1}{8\cdot 27}+\cdots$

Döntsük el, hogy konvergensek-e, illetve abszolút konvergensek-e a következő sorok!

3.72. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

3.73. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$

3.74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

3.75. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

3.3.2. Gyakorló feladatok

3.76. Igaz-e, hogy ha egy végtelen sorban a tagok előjele váltakozik, akkor a sor konvergens?

Melyik sor Leibniz-sor? Melyik sor konvergens?

3.77. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

3.78. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \cdots$

Döntsük el, hogy konvergensek-e, illetve abszolút konvergensek-e a következő sorok!

3.79. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

3.80. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

4. Vegyes feladatok

4.1. Logikai feladatok

Balkezes Bendegúz a bal kezével mindig igaz, a jobb kezével mindig hamis állításokat ír.

4.1. Van-e olyan mondat, amelyiket egyik kezével sem tud leírni?

4.2. Van-e olyan állítás, amelyiket mindkét kezével le tud írni?

4.3. Van-e olyan állítás, amit le tud írni bal kézzel, és az állítás tagadását is le tudja írni bal kézzel?

4.4. Van-e olyan állítás, amit le tud írni jobb kézzel, és az állítás tagadását is le tudja írni jobb kézzel?

4.5. Egy 13 jegyű kódszámban bármely 3 szomszédos számjegy összege 11. A kód második jegye 6, a tizenkettedik jegy pedig 4. Mi a 13-adik jegy?

4.6. Egy kereskedőnek nem pontos a kétkarú mérlege, mert a karok hossza nem egyenlő. Adjunk meg olyan módszert, amellyel ezzel a mérleggel is pontosan le tudja mérni az áruk súlyát!

4.7. Csélcsap Csaba egyszerre udvarolt Amáliának és Borókának. Amália a metró A, Boróka ugyanazon metróvonal B végállomásánál lakott. Csaba a véletlenszerű időpontban befejezett munka után lement a metróba, és mert mindkét lányt egyformán szerette, a metróra bízta a döntést. Amelyik metró először jött, arra szállt fel. A metrók mindkét irányban 10 percenként követték egymást. Egy idő után azt vette észre, hogy átlagosan 10 alkalomból 9-szer Amáliához ment, és csak egyszer Borókához. Hogyan lehetséges ez?

4.8. Kovács úr minden délután 5 órakor érkezik vonattal az állomásra, ahol a felesége várja kocsival, és azonnal hazaviszi. Egyik nap Kovács úr hamarabb végzett a munkájával, és korábbi vonatra szállt. Így 4 órakor érkezett az állomásra. Elindult gyalog hazafelé. A felesége a szokásos időben indult érte kocsival. Amikor az úton találkoztak, Kovács úr beült a kocsiba, és hazamentek. A szokásos időpontnál 10 perccel hamarabb érkeztek haza. Hány órakor ült be Kovács úr az autóba, ha feltételezzük, hogy a felesége mindig azonos és állandó sebességgel ment a kocsival?

4.9. Ebben a feladatban a Földet tökéletesen gömb alakúnak képzeljük. Ezen a gömb alakú Földön indult el egy kutató reggeli sétára. Először ment 1 km-t délre, majd 1 km-t keletre, végül 1 km-t északra, és így visszért arra pontra, ahonnan elindult. Honnan indulhatott el?

4.10. Egy biológus egy 10m hosszú rúdra 100 hangyát rakott fel. Véletlenszerű volt, hogy melyik hangya a rúd melyik pontjára került, és az is véletlenszerű volt, hogy melyik hangya a rúd melyik vége fele nézett. A hangyák állandó, 1cm/s sebességgel haladtak mindaddig, amíg bele nem ütköztek egy másik hangyába. Akkor mindkét hangya megfordult, és 1cm/s sebességgel haladtak az ellenkező irányba a következő ütközésig, amikor is az ütköző hangyák megint megfordultak, és állandó, 1cm/s sebességgel haladtak tovább az ellenkező irányba a következő ütközésig, és így tovább. Ha egy hangya elért a rúd valamelyik széléhez, akkor leesett a rúdról. Bizonyítsuk be, hogy a kísérlet kezdete után 20 perccel már üres volt a rúd!

4.11. Kivágjuk egy sakktáblából az egyik átlójának egyik végén levő négyzetet (az A1 mezőt). Le lehet-e fedni a megmaradó sakktáblát 21 darab 3×1-es lappal? (Egy lap 3 egymás melletti mezőt tud lefedni.)

4.2. Hibakereső

4.12. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3} = 1$ Emeljük köbre mindkét oldalt!

$$1 - x + 3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2 \sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2 + x - 3 = 1$$

$$-2 + 3\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x-3}\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3}\right) = 1$$

Vegyük észre, hogy a baloldalon a zárójelben levő összeg az eredeti egyenlet szerint 1.

$$\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$(1-x)(x-3) = 1$$

$$x = 2$$

Ellenőrizzük az eredményt az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel!

4.13. **Állítás:** Ha G egy olyan egyszerű véges gráf (azaz G-ben nincs hurokél és nincs többszörös él), amelyben minden csúcs foka 2, akkor G kör.
Bizonyítás a gráf csúcsainak számára vonatkozó teljes indukcióval. Induljunk ki $n = 3$-ból, akkor a feltételeket csak a K_3 teljes gráf elégíti ki, ami valóban kör.
Tegyük fel, hogy az $n-1$ csúcsú, a feltételeknek eleget tevő gráfra igaz az állítás, és tegyük fel, hogy $n > 3$. Legyen u a gráf egy csúcsa. Mivel u foka 2, u-nak pontosan 2 szomszédja van, legyenek ezek v és w. Hagyjuk el a gráfból az u csúcsot a hozzátartozó élekkel együtt, és húzzunk be egy élt v és w között. Ekkor megint minden csúcs foka 2 lesz, viszont a gráfnak

most $n-1$ csúcsa van, tehát az indukciós feltevés miatt kör. Ha u-t beillesztjük v és w közé, akkor a gráfnak n csúcsa lesz, és továbbra is kör.

4.14. **Állítás:** Ha van valamennyi egyformának látszó pénzérménk, de az egyik hamis, és így könnyebb, mint a többi, akkor egy kétkarú mérleg segítségével egyetlen méréssel kiválaszthatjuk a hamisat.
Bizonyítás: Induljunk ki 2 darab érméből, ekkor 1 mérés elég. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ darab érme esetén is elég 1 mérés. Vegyünk most $n+1$ érmét! Egyet tegyünk félre! A maradék n érméből az indukciós feltétel miatt 1 méréssel ki tudjuk választani a hamisat, illetve, ha nincs köztük a hamis, akkor a félretett érme a hamis. Tehát $n+1$ érme esetén is elég volt 1 mérés.

4.15. Legyen egy téglalap két éle a és b, átlója pedig c. Ekkor a téglalap területe $T = ab$, és a téglalap kerülete $K = 2(a+b)$.

Tehát: $$\frac{T}{\frac{K}{2}} = \frac{ab}{\frac{2(a+b)}{2}}$$

Így: $$\frac{2T}{K} - \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{ab}{a+b} - \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Mivel $0 < a < c$, ezért: $$a\left(\frac{2T}{K} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right) < c\left(\frac{ab}{a+b} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$

Beszorzás után: $$\frac{2Ta}{K} - \frac{ac}{\sqrt{2}} < \frac{abc}{a+b} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}$$

T és K helyébe írjunk ab-t és $2(a+b)$-t: $$\frac{2a^2b}{2(a+b)} - \frac{ac}{\sqrt{2}} < \frac{abc}{a+b} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}$$

Rendezés után: $$\frac{2a^2b}{2(a+b)} - \frac{abc}{a+b} < \frac{ac}{\sqrt{2}} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}$$

Kiemelés után: $$\frac{ab}{a+b}(a-c) < \frac{c}{\sqrt{2}}(a-c)$$

Osztunk $(a-c)$-vel, de $a-c<0$: $$\frac{ab}{a+b} > \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Négyzet esetén $b = a$ és $c = a\sqrt{2}$: $$\frac{a^2}{2a} > \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Egyszerűsítés és rendezés után: $$1 > 2$$

Hol a hiba?

4.16. Legyen $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots = 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots)$. Tehát $S = 1 + 2S$, amiből $S = -1$. Hol a hiba?

4.3. Egyenlőtlenségek

4.17. Tudjuk, hogy $a < b$ és $x < y$. Melyik nagyobb: $ax + by$ vagy $ay + bx$?

Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket!

4.18. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$, ha $a, b > 0$

4.19. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, ha $a, b, c > 0$

4.20. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$, ha $a, b, c > 0$

4.21. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$, ha $a, b, c > 0$

4.22. Bizonyítsuk be, hogy $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$, ha k, n pozitív egészek, és $k < n$.

4.23. Melyik nagyobb: 1000^{1000} vagy 1001^{999}?

4.24. Melyik nagyobb: 1000^{1001} vagy 1001^{1000}?

4.4. Sorozatok

Mit mondhatunk a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ határértékről, ha

4.25. $\sqrt[n]{a_n} \to 2$?

4.26. $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$?

4.27. $\sqrt[n]{a_n} \to 1$?

Mit mondhatunk a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n$ határértékről, ha

4.28. $a_n \to 2$?

4.29. $a_n \to \frac{1}{2}$?

4.30. $a_n \to 1$?

Mutassunk példát olyan a_n sorozatra, amelyre igaz, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, és

4.31. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

4.32. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

4.33. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

4.34. $\lim_{n\to\infty} a_n = 7$

4.35. Legyen $a_0 = 0, a_1 = 1$, és $n > 1$ esetén $a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$. Határozzuk meg az (a_n) sorozat határértékét!

4.36. Tegyük fel, hogy $\lim_{k\to\infty} a_k = A$. Határozzuk meg a $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ sorozat határértékét!

4.37. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész szám esetén $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} \leq e$.

4.38. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = e$

4.39. Bizonyítsuk be, hogy az e szám irracionális!

4.40. Adottak az a és b pozitív számok. Legyen $a_1 = a$ és $b_1 = b$, továbbá $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ és $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Bizonyítsuk be, hogy az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek, és hogy a két sorozat határértéke megegyezik!

4.5. Végtelen sorok

4.41. Tegyük fel, hogy $b_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$, továbbá $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Mit állíthatunk a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját illetően biztosan, ha

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens.

4.42. Tegyük fel, hogy $b_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$, továbbá $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Mit állíthatunk a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját illetően biztosan, ha

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens. **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens.

4.43. Mit állíthatunk a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját illetően, ha az előző két feladatban $b_n > 0$ helyett csak azt tesszük fel, hogy $b_n \neq 0$?

Adjunk meg olyan divergens sorokat, amelyekre teljesül, hogy

4.44. a tagok előjele váltakozik, és a tagokból álló sorozat 0-hoz tart!

4.45. a tagok előjele váltakozik, és a tagok abszolút-értékeinek a sorozata monoton csökken!

4.46. a tagokból álló sorozat monoton csökkenve 0-hoz tart!

Konvergensek-e a következő sorok? Igaz-e, hogy Leibniz-sorok?

4.47. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$ és $a_{2n} = -\frac{1}{3^{n-1}}$

4.48. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$ és $a_{2n} = -\frac{1}{3n}$

4.49. Legyen $a_{2n} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ és $a_{2n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját hányadoskritériummal is, és gyökkritériummal is! Mit tapasztalunk?

4.50. Bizonyítsuk be, hogy ha egy végtelen sor konvergenciáját el lehet dönteni hányadoskritériummal, akkor el lehet dönteni gyökkritériummal is!

Megoldások

1. Bizonyítási módszerek, valós számok

1.31. Van olyan medve, amelyik nem szereti a mézet.

1.32. Minden tengerész, minden kikötőben talál olyan kocsmát, ahol még nem járt.

1.33. Minden medve minden mézet szeret.

1.34. Itt a nyár, de mégis hideg van.

1.35. A nagynénikémnek kerekei vannak, mégsem ő a miskolci gyors.

1.36.

(a) $(\exists K)\ (\forall B)\ \neg\Phi(B, K)$
Van olyan kecske, amit egyetlen bolha sem csípett meg. (bekenték bolhariasztóval)

(b) $(\exists K)\ (\exists B)\ \neg\Phi(B, K)$
Van olyan kecske, amit valamelyik bolha nem csípett meg. (szerencséje volt)

(c) $(\forall K)\ (\exists B)\ \neg\Phi(B, K)$
Egyetlen kecskét sem csípte meg az összes bolha. (elszaladtak a kecskék)

(d) $(\forall K)\ (\forall B)\ \neg\Phi(B, K)$
Egyetlen bolha sem csípett meg egyetlen kecskét sem. (ezek csak kutyát csípnek)

(e) $(\forall B)\ (\exists K)\ \neg\Phi(B, K)$
Egyetlen bolha sem csípett meg minden kecskét. (túl sok a kecske)

(f) $(\exists B)\ (\forall K)\ \neg\Phi(B, K)$
Van olyan bolha, amelyik egyetlen kecskét sem csípett meg. (vegetáriánus bolha)

1.37. **A:** $(\exists L)\ (\forall F)\ T(F, L)$ **B:** $(\exists F)\ (\forall L)\ T(F, L)$

$A \not\Rightarrow B$, például, ha egy fiú senkivel sem táncolt.

$B \not\Rightarrow A$, például, ha egy lány senkivel sem táncolt.

1.38. **A:** $(\exists L)\ (\exists F)\ T(F, L)$ **B:** $(\exists F)\ (\exists L)\ T(F, L)$

$A \iff B$, mert $T(F, L)$ és $T(L, F)$ egyszerre igaz vagy hamis, a formula szimmetrikus a változóira nézve.

1.39. **A:** $(\forall F)\ (\exists L)\ T(F,L)$ **B:** $(\forall L)\ (\exists F)\ T(F,L)$

$A \not\Longrightarrow B$, például, ha csak egy lány táncolt, de ő mindenkivel.

$B \not\Longrightarrow A$, például, ha csak egy fiú táncolt, de ő mindenkivel.

1.40. **A:** $(\forall F)\ (\forall L)\ T(F,L)$ **B:** $(\exists L)\ (\forall F)\ T(F,L)$

$A \Longrightarrow B$, mert van legalább egy lány, és őt minden fiú megtáncoltatta.

$B \not\Longrightarrow A$, például, ha csak egy lány táncolt, de ő mindenkivel.

1.41. Kétoldali tartalmazást bizonyítunk.

Legyen $x \in A \cap (B \cup C)$ tetszőleges. Ekkor $x \in A$ és $x \in B \cup C$. Ha $x \in B$, akkor $x \in A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ha pedig $x \in C$, akkor $x \in A \cap C \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ezzel beláttuk, hogy

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Legyen most $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ tetszőleges. Ekkor $x \in A \cap B$ vagy $x \in A \cap C$. Ha $x \in A \cap B$, akkor $x \in A$, és $x \in B \subset B \cup C$, és így $x \in A \cap (B \cup C)$. Hasonlóan, ha $x \in A \cap C$, akkor $x \in A$, és $x \in C \subset B \cup C$, és így $x \in A \cap (B \cup C)$. Ezzel beláttuk, hogy

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

1.42. Igaz. Legyen $x \in A$ tetszőleges. Mivel $A \subset B$, ezért $x \in B$. És mivel $B \subset C$, ezért $x \in C$.

1.43. Igaz, ez éppen a részhalmaz definíciója.

1.44. Nem igaz, például ha $A = B = [0,1]$, akkor $C = [0,1]$ és $C \setminus B = \emptyset \neq A$.

1.45. Nem igaz, például ha $A = [0,1],\ B = [0,2]$, akkor $A \setminus B = \emptyset$ és $A \neq B$.

Megjegyzés: ne keverjük össze a kivonást a halmazok különbségével! Annyi viszont igaz, hogy ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor $A \subset B$

1.46. Nem igaz, például ha $A = [0,2],\ B = [1,3]$, akkor $C = A \cap B = [1,2]$ és $A \not\subset C$.

Megjegyzés: ne keverjük össze a metszetet az unióval. Az állítás az „unióra" igaz: ha $A \cup B = C$, akkor $A \subset C$.

1.47.

$$A \setminus (B \cup C)$$

1.48.

$$((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$$

1.49.

$$x \in \overline{(A \cup B)} \iff x \notin (A \cup B) \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \iff$$
$$\iff (x \in \overline{A}) \wedge (x \in \overline{B}) \iff x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$$

1.2. Direkt bizonyítás, indirekt bizonyítás, teljes indukció

1.81. Azonos átalakításokat végzünk, felhasználva, hogy a és b pozitív.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq 2\sqrt{ab} \iff (a+b)^2 \geq 4ab \iff$$
$$\iff a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff$$
$$\iff (a-b)^2 \geq 0$$

Megjegyzés: az utolsó egyenlőtlenség baloldala, $(a-b)^2$ pontosan akkor nulla, ha $a = b$. Ezzel azt is beláttuk, hogy az eredeti egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $a = b$.

1.82. Visszavezetjük az előző feladatra.

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \iff \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{2} \iff \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{2}$$

Alkalmazhatjuk az előző feladat eredményét, a és b helyett az $1/a$ és $1/b$ pozitív számokra.

1.83. Egyedül A_1 igaz biztosan.

1.84. Mindegyik A_n igaz. Ez a forma a teljes indukció „descente infinie” verziója.

1.85. Legyen $s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$. Ekkor $s_1 = 4,\ s_2 = 9, s_3 = 16, \ldots$. A sejtés

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Az $n = 1$ esetre igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz, belátjuk, hogy akkor $(n+1)$-re is igaz.

$$s_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) + (2n+3) = s_n + 2n + 3 =$$
$$= (n+1)^2 + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = (n+2)^2$$

1.86. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 10$, akkor

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3.$$

Tegyük fel, hogy n-re igaz az egyenlőtlenség. Mivel ekkor

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^3,$$

ezért elég belátni, hogy ha $n > 9$, akkor $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 < 2n^3$, azaz azt, hogy $n^3 - 3n^2 - 3n - 1 > 0$.

$$n^3 - 3n^2 - 3n - 1 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - 6n = (n-1)^3 - 6n > 0 \iff (n-1)^3 > 6n$$

Ha $n > 9$, akkor $n - 1 > 6$. Másrészt

$$(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 > n \iff n^2 + 1 > 3n.$$

Ez biztosan teljesül, ha $n > 3$. A két utolsó egyenlőtlenség szorzatából

$$(n-1)^3 > 6n.$$

1.87. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$ akkor $1 \le 2\sqrt{1} = 2$. Tegyük fel, hogy n-re igaz az egyenlőtlenség, azaz

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n}.$$

$$s_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = s_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Elég belátni, hogy $2\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2\sqrt{n+1}$.

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le 2\sqrt{n+1} \iff 2\sqrt{n(n+1)} + 1 \le 2(n+1) \iff$$
$$\iff \sqrt{n(n+1)} \le \frac{2n+1}{2} = \frac{n + (n+1)}{2}.$$

Ez pedig igaz a kéttagú számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával az n és $n+1$ számokra.

1.88. Teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$ akkor $1^2 - 0 \cdot 3 = 1 = 1^{1+1}$. Tegyük fel, hogy n-re igaz, hogy

$$u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Felhasználjuk, hogy $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, és ezért $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$.

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n(u_{n+1} + u_n) = u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - u_n^2 =$$
$$= u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = -(u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1}) = (-1)^{n+2}.$$

Ez éppen a bizonyítandó egyenlőség, n helyett $(n+1)$-re felírva.

1.89. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ha $n \geq 6$, akkor $u_n > 1,5^{n-1}$. Ha $n = 6$ és $n = 7$ esetén

$$u_6 = 8 > 7,59375 = 1,5^5, \quad u_7 = 13 > 11,390625 = 1,5^6.$$

Legyen $n \geq 6$ és tegyük fel, hogy n és $n+1$ esetén igaz az egyenlőtlenség:

$$u_n > 1,5^{n-1}, \quad u_{n+1} > 1,5^n.$$

Be kell látnunk, hogy $n+2$ esetén is igaz az egyenlőtlenség.

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n > 1,5^n + 1,5^{-1}n = 1,5^{n-1}(1,5+1) > 1,5^{n+1},$$

mivel $1,5^2 = 2,25 < 2,5$.

1.90. Írjuk fel az (a_n) sorozat néhány tagját:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4,\ a_4 = 9,\ a_5 = 16,\ \ldots$$

A sejtés az, hogy $a_n = (n-1)^2$, Tegyük fel, hogy $a_n = (n-1)^2$ és $a_{n+1} = n^2$. Ekkor

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 = 2n^2 - (n-1)^2 + 2 = 2n^2 - n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

éppen a keresett egyenlőség.

1.91. Nem tudnak így ugrani. Színezzük meg a sakktábla mezőit két színnel a szokásos módon sötétre és világosra. Ekkor bármely két szomszédos mező ellenkező színű, ezért ha egy bolha ugrik, akkor más színű mezőre ugrik, mint ahol eredetileg volt. De a sakktábla oldala páratlan hosszúságú, ezért a táblának páratlan sok (25) mezője van és így valamelyik színből, például sötétből (ha a bal alsó mező sötét) több van, mint világosból. Eszerint a sötét mezőn álló bolhák az ugrás után kevesebb mezőre érkeznek, így valamelyik világos mezőn egynél több bolha landol.

Megjegyzés: Valójában azt bizonyítottuk be, hogy semmilyen páratlan oldalú sakktáblán sem lehet így ugratni a bolhákat. Ennek a feladatnak egy ismertebb verziója, hogy páratlan oldalú sakktáblát nem lehet lefedni (egyrétűen) 2×1-es dominókkal. Azt könnyű belátni, hogy minden páros oldalú sakktábla lefedhető.

1.92. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\sqrt{3}$ racionális. Ekkor megadható két egész szám, p és q úgy, hogy

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}, \qquad 3 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Feltehetjük, hogy mindkét egész szám pozitív és a hányadosuk már nem egyszerűsíthető, azaz p és q relatív prím számok. Az egyenlőséget q^2-tel beszorozva

$$3q^2 = p^2.$$

Eszerint p^2 osztható 3-mal. Mivel 3 prímszám ezért p is osztható 3-mal, $p = 3r$, ahol r egy pozitív egész szám.

$$3q^2 = 9r^2, \qquad q^2 = 3r^2.$$

Az előző gondolatmenethez hasonlóan azt kapjuk, hogy q is osztható 3-mal. Ez ellentmond annak, hogy p és q relatív prím.

Megjegyzés: Ugyanez a bizonyítás 3 helyett tetszőleges $n > 0$ prímszámra is elmondható: ha $n > 0$ prímszám, akkor $\sqrt{n}$ irracionális. Valójában n-ről csak azt használtuk ki, hogy nem osztható 1-nél nagyobb négyzetszámmal, azaz n előáll különböző prímszámok szorzataként. A bizonyítást tovább gondolva megkaphatjuk azt a tételt, hogy pozitív egész n esetén n négyzetszám vagy $\sqrt{n}$ irracionális.

1.93. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = r$ racionális szám. De akkor $1 + \sqrt{3} = 2 \cdot r$ és $\sqrt{3} = 2 \cdot 3 - 1$ is racionális szám. Ez ellentmond az előző (1.92.) feladat állításának!

1.94. Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \frac{p}{q}, \qquad p^2 = 2 \cdot 3 \cdot q^2,$$

ahol p és q két relatív prím pozitív egész szám. Mivel 2 és 3 két különböző prímszám, ezért p osztható 6-tal, $p = 2 \cdot 3 \cdot r$. Innen

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot r^2 = 2 \cdot 3 \cdot q^2, \qquad q^2 = 2 \cdot 3 \cdot r,$$

és így q is osztható 6-tal, ami ellentmondás.

1.95. Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{2}{3} = \frac{p^2}{q^2}, \qquad 2q^2 = 3p^2,$$

ahol p és q két relatív prím pozitív egész szám. Innen azt kapjuk, hogy p osztható 2-vel, q pedig osztható 3-mal, azaz

$$p = 2r, \qquad q = 3s,$$

ahol r és s két pozitív egész szám.

$$2 \cdot 3^2 \cdot s^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot r^2, \qquad 3s^2 = 2r^2.$$

Innen kapjuk, hogy r, és ezért p is osztható 3-mal, ami ellentmondás.

1.96. Indirekt módon bizonyítunk. tegyük fel, hogy minden n estén $a_n \geq \dfrac{1}{1000} = 10^{-3}$. Ekkor

$$a_1 = a_0 - a_0^2 \leq 0,9 - 10^{-6}, a_2 = a_1 - a_1^2 \leq a_1 - 10^{-6} \leq 0,9 - 2 \cdot 10^{-6}, \ldots, a_n \leq 0,9 - n \cdot 10^{-6}.$$

Ez az utolsó, $a_n < 0,9 - n \cdot 10^{-6}$ egyenlőtlenség könnyen belátható. De akkor az $n = 10^6$ választással $a_n < 0,9 - 1 < 0 < 10^{-3}$, ami ellentmondás.

Megjegyzés: mivel a bizonyítás indirekt, formálisan csak azt láttuk be, hogy van egyezrednél kisebb tagja a sorozatnak, azt nem, hogy az egymilliomodik tag kisebb mint egyezred. Ahhoz, hogy ezt is belássuk, módosítani kell az indirekt feltevést arra, hogy

$$a_n \geq 10^{-3}, \text{ ha } n \leq 10^6.$$

1.3. Nevezetes közepek, becslések

1.127. Az a^2bc egy négytényezős szorzat. Írjuk fel a megadott 3 tagú összeget 4 tagú összegként és használjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget 4 szám esetén:

$$\frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b + c}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b \cdot c} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}a^2bc}$$

Eszerint

$$\frac{18}{4} = \frac{9}{2} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{4}a^2bc}$$

Negyedik hatványra emelés és átrendezés után:

$$a^2bc \leq 4\left(\frac{9}{2}\right)^4$$

A jobboldalon szereplő szám a keresett maximum, hiszen $\frac{a}{2} = b = c = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ esetén egyenlőség van.

1.128. Használjuk a harmonikus és a számtani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{abc}{ab + bc + ac} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{a + b + c}{3} = \frac{18}{9} = 2.$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c = 6$.

1.129.

$$2a + b + c = 3 \cdot \frac{2a + b + c}{3} \geq 3\sqrt[3]{(2a)bc} = 3\sqrt[3]{2 \cdot 18} = 3\sqrt[3]{36}$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $2a = b = c = \sqrt[3]{36}$.

1.130. Felhasználjuk a mértani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$a^2+b^2+c^2=3\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^2\geq 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2=3\left(\sqrt[3]{18}\right)^2.$$

Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha $a=b=c=\sqrt[3]{18}$.

1.131. Természetesen csak akkor értelmes a feladat, ha $v>u$. A v_a átlagsebesség a megtett út osztva a megtételhez szükséges t idővel:

$$v_a=\frac{2s}{t}.$$

Számoljuk ki t-t. A folyásirányban a sebesség $v+u$, az s úthoz szükséges idő

$$t_1=\frac{s}{v+u}.$$

Az ellenkező úton a sebesség $v-u$, az s úthoz szükséges idő

$$t_2=\frac{s}{v-u}.$$

Mivel $t=t_1+t_2$, ezért

$$v_a=\frac{2s}{\frac{s}{v+u}+\frac{s}{v-u}}=\frac{2}{\frac{1}{v+u}+\frac{1}{v-u}}.$$

Tehát v_a éppen a harmonikus közepe a $v+u,\ v-u$ számoknak, és ezért $u>0$ esetén határozottan kisebb a két szám számtani közepénél, v-nél.

1.132. Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$x^2(1-x)=4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot(1-x)\leq 4\cdot\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+(1-x)}{3}\right)^3=\frac{4}{27}.$$

Egyenlőség csak akkor van, ha $\frac{x}{2}=1-x$, azaz $x=\frac{2}{3}$.

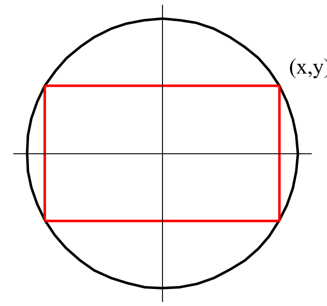
Tehát a keresett maximum: $\frac{4}{27}$.

1.133. Az ábra a gömb és a henger egy síkmetszetét ábrázolja. Az ábra jelöléseit használva, a henger térfogata:

$$V=2\pi\cdot U,\ \text{ahol}\ U=x^2\cdot y\ \text{és}\ x^2+y^2=1,\ \ 0\leq x\leq 1.$$

Ezért $U = x^2\sqrt{1-x^2}$. Számoljuk ki $\dfrac{U^2}{4}$ maximumát:

$$\frac{U^2}{4} = \frac{x^4(1-x^2)}{4} = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot(1-x^2)$$



Az itt szereplő három pozitív szám összege x-től függetlenül 1, és így szorzatuk akkor maximális, ha megegyeznek:

$$\frac{x^2}{2} = 1 - x^2 \text{ azaz } x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \ y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tehát a maximális térfogat: $V = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

1.134. Átalakítjuk az egyenlőtlenséget úgy, hogy a bal oldalon csak a legmagasabb fokú (n^5) tag maradjon:

$$0,1n^5 + 30n^4 - 20n^3 + 10 > 1000n^4 + 2000n^3 + \frac{1}{n} \iff 0,1n^5 > 930n^4 + 2020n^3 + \frac{1}{n}.$$

$$930n^4 + 2020n^3 + \frac{1}{n} \le 930n^4 + 2020n^4 + n^4 = 2951n^4 < 3000n^4 < 0,1n^5,$$

ha $n > 30000 = 3\cdot 10^4$. Tehát az $N = 3\cdot 10^4$ megoldás.

1.135. Az egyenlőtlenség baloldalát az úgynevezett „gyöktelenítéssel” (gyökök összegével való bővítés) alakítjuk át:

$$\sqrt{n+10} - \sqrt{n+1} = \frac{9}{\sqrt{n+10}+\sqrt{n+1}} < \frac{10}{\sqrt{n}} < 0,001.$$

$$\frac{10}{\sqrt{n}} < 0,001 \iff 10^4 < \sqrt{n} \iff 10^8 < n.$$

Tehát az $N = 10^8$ választás megfelel.

1.136.

$$\frac{1}{n^5 + 4n^3 + 2n^2 + 1} < \frac{1}{1000} \qquad \iff \qquad n^5 + 4n^3 + 2n^2 + 1 > 1000$$

Mivel $n^5 + 4n^3 + 2n^2 + 1 > n^5 \ge n^3$, ezért az előző egyenlőtlenség biztosan teljesül, ha $n > 10$.

Tehát az $N = 10$ megoldása a feladatnak. De ha a 10 megoldás, akkor minden $N \ge 10$ is megfelelő N, ezért végtelen sok megoldása van a feladatnak.

1.137. Használjuk a **Bernoulli-egyenlőtlenséget**.

$$0,9^n < \frac{1}{100} \iff \left(\frac{10}{9}\right)^n > 100.$$

$$\left(\frac{10}{9}\right)^n = \left(1+\frac{1}{9}\right)^n > 1+\frac{n}{9} > \frac{n}{9} > 100,$$

ha $n > 900$. Tehát az $n = 901$ (és minden nagyobb n) ilyen szám.

1.138.

$$\sqrt[n]{2} < 1,01 \iff 1,01^n > 2.$$

A **Bernoulli-egyenlőtlenség** szerint

$$1,01^n = \left(1+\frac{1}{10}\right)^n > 1+\frac{n}{10} > \frac{n}{10} > 2, \text{ ha } n > 20.$$

1.139.

$$\sqrt[n]{0,1} > 0,9 \iff \frac{1}{0,9} > \sqrt[n]{\frac{1}{0,1}} \iff \frac{10}{9} > \sqrt[n]{10} \iff \left(1+\frac{1}{9}\right)^n > 10.$$

$$\left(1+\frac{1}{9}\right)^n > 1+\frac{n}{9} > \frac{n}{9} > 10, \text{ ha } n > 90.$$

1.140. Az **Arkhimédeszi axióma** szerint van olyan N pozitív egész szám, amelyre $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$, ezek közül a legkisebb az $\frac{1}{\varepsilon}$ **felső egészrésze**, $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$.

1.141.

$$\frac{1}{n^2+\sqrt{n}+1} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Tehát az $N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$ megfelel.

1.142.

$$\frac{n+1}{n^2+\sqrt{n}+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon, \text{ ha } n > \frac{2}{\varepsilon}.$$

1.143. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $n \geq 2$, és ezért

$$\left[\frac{n}{2}\right] \geq \frac{n-1}{2} \geq \frac{n}{4}.$$

Hagyjuk el az a_n-t leíró kifejezés számlálójából azokat a tagokat, amelyeknek az indexe (a gyök alatti szám) kisebb, mint $\frac{n}{2}$. A többi tag mindegyike legalább $\frac{n}{2}$, és ilyen tagból legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ darab van. Ezért

$$a_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n} \leq \frac{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]}{n} \geq \frac{\frac{\sqrt{n}}{2}\cdot\frac{n}{4}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{8} > K, \text{ ha } n > 64K^2.$$

1.144. Megint legyen n legalább kettő, és ezért $\left[\frac{n}{2}\right] \geq \frac{n}{4}$.

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n} \geq \frac{\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]}{n} \geq \frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{2}\cdot\frac{n}{4}}{n} = \frac{\sqrt[3]{n}}{8} > K, \text{ ha } n > 512K^3.$$

1.145. Legyen $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n\sqrt{1}+n\sqrt{2}+n\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}}{1+2+\cdots+n} = \\
&= \frac{n(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n+1} \geq \\
&\geq 2\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]}{n+1} \geq \frac{n\sqrt{n}}{4(n+1)} \geq \frac{\sqrt{n}}{8} > K, \text{ ha } n > 64K^2.
\end{aligned}$$

1.146. Először is oldjuk meg az $\frac{1}{3-x} = x$ egyenletet. Feltesszük, hogy $x \neq 3$.

$$\frac{1}{3-x} = x \iff 1 = x(3-x) \iff x^2 - 3x + 1 = 0$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai:

$$a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \qquad b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Nyilvánvaló, hogy $a_0 = 0 < a$. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ha $a_n < a$, akkor $a_{n+1} < a$ és $a_n < a_{n+1}$. Tegyük fel tehát, hogy $a_n < a$. Ekkor

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n} < \frac{1}{3 - a} = a.$$

Itt felhasználtuk azt a nyilvánvaló tényt, hogy $a < 3$. Mivel a_n kisebb, mint a pozitív főegyütthatós $x^2 - 3x + 1 = 0$ másodfokú egyenlet kisebbik gyöke, ezért

$$a_n^2 - 3a_n + 1 > 0 \iff a_n < \frac{1}{3 - a_n} = a_{n+1}.$$

Az így kapott egyenlőtlenség minden n-re igaz, tehát a sorozat (szigorúan) monoton nő.

1.4. Valós számok, számhalmazok

1.191. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 2$ esetben éppen a háromszög egyenlőtlenséget kapjuk. Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 2$ esetén igaz az

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$$

egyenlőtlenség. Az indukciós feltevés és a háromszög egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+|a_{n+1}| \geq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|+|a_{n+1}| \geq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}|\,.$$

1.192.
- **(a)** A H halmaznak nincs minimuma (minimális eleme).
- **(b)** H-nak nincs maximuma.
- **(c)** H-nak van maximuma.
- **(d)** A H halmaznak van minimuma.

1.193. Ilyen sorozat például az $a_n = (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, azaz

$$a_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páros} \\[2ex] -1 + \dfrac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

1.194. $\forall x \in A\ \exists y \in A\ (y < x)$

1.195. $A = \left\{ \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$, $\inf A = 0,\ \sup A = \max A = 1$, nincs minimuma.

1.196. $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ esetén $\inf A = 0,\ \sup A = \max A = 2$, nincs minimuma.

1.197. Nem következik. Legyen például $H = (0, 1),\ c = 2$. Ekkor $\sup H = 1 < c = 2$.

2. Sorozatok

2.1. A határérték fogalma, konvergens sorozatok, divergens sorozatok

2.25. Mivel $a_n \to 1$, ezért megadhatók a keresett küszöbindexek.

(a) Legyen $\varepsilon = 0,1$.

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,1 \iff \sqrt{n} > 10 \iff n > 10^2$$

Tehát az $n_0 = 10^2$ választás megfelel.

(b) Legyen $\varepsilon = 0,01$. Az előző megoldásban $0,1$-et $0,01$-re cserélve kapjuk, hogy az $n_0 = 10^4$ választás megfelel.

2.26. Nincs ilyen n_0 küszöbindex, ugyanis az előző feladat **(a)** részének megoldása szerint ha $n > 10^4$, akkor $|a_n - 1| < 0,1$. Ezért ezekre az n-ekre

$$|a_n - 2| = |(a_n - 1) - (2 - 1)| \geq |1 - |a_n - 1|| > 1 - 0,1 = 0,9 > 0,001.$$

2.27. Ezek a feladatok a konvergencia definíciójában szereplő jelek (logikai kvantorok, egyenlőtlenség) sorrendjének és típusának a fontosságát mutatják meg.

(a) Igaz. A 2.25. feladatot általánosítva könnyen látható, hogy $a_n \to 1$ és ez a formula éppen ezt mondja.

(b) Nem igaz. Ez a formula pontosan akkor teljesül egy (a_n) sorozatra, ha valahonnan kezdve a sorozat minden tagja 1. A megadott sorozat nem ilyen.

(c) Igaz. A formula pontosan akkor teljesül egy (a_n) sorozatra, ha a sorozat korlátos. A megadott sorozat korlátos.

(d) Nem igaz. A formula pontosan akkor teljesül egy (a_n) sorozatra, ha van olyan nyílt (ε sugarú) intervallum az 1 körül, amelyik a sorozatnak csak véges sok tagját tartalmazza.

(e) Nem igaz. A formula pontosan akkor teljesül egy (a_n) sorozatra, ha a sorozat első tagja $a_1 = 1$, ugyanis az $n_0 = 1$ választás minden ε esetén megfelel.

(f) Nem igaz. A formula semilyen sorozatra nem teljesül.

2.28.

$$\sqrt[n]{2} < 1,01 = 1 + 0,1 \iff 2 < (1 + 0,1)^n$$

A **Bernoulli-egyenlőtlenség** szerint

$$(1 + 0,1)^n \geq 1 + 0,1n > 0,1n > 2,$$

ha $n > 20$.

2.29.

$$\sqrt[n]{n} < 1,0001 \iff n < \left(1 + 10^{-4}\right)^n$$

A binomiális kifejtést használva

$$\left(1 + 10^{-4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^{-4k} > \binom{n}{2} 10^{-8} = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 10^8} > \frac{n^2}{8 \cdot 10^8} > n,$$

ha $n > 8 \cdot 10^8$.

2.30.

$$\sqrt{n^2+5} - n = (\sqrt{n^2+5} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2+5}+n}{\sqrt{n^2+5}+n} = \frac{5}{\sqrt{n^2+5}+n} < \frac{5}{n} < 0,01,$$

ha $n > 500$.

2.31. Mindegyik állítás igaz. Egyedül a **(d)** állítás jelenti azt, hogy $a_n \to \infty$.

2.32. A sorozat nem tarthat ∞-hez, de tarthat $-\infty$-hez vagy egy valós számhoz.

2.33. A sorozat nem tarthat $-\infty$-hez, de a többi eset lehetséges.

2.34.

(a) Az (a_n) sorozat konvergens, $a_n \to 4$.

(b) Az (a_n) sorozat oszcillálva divergens.

2.2. Határérték és műveletek, határérték és rendezés

2.79.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^6+3n^5}{7n^6-2} = \frac{2}{7}$$

$$\left|\frac{2n^6+3n^5}{7n^6-2} - \frac{2}{7}\right| = \frac{7(2n^6+3n^5) - 2(7n^6-2)}{7(7n^6-2)} = \frac{21n^5+4}{7(7n^6-2)} <$$

$$< \frac{21n^5+4n^5}{7(7n^6-2n^6)} = \frac{25}{35} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség biztosan teljesül, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$, és így küszöbindexnek megfelel a

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

2.80. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-n) = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}-2n) = 0$.

Keressünk küszöbindexet $\frac{\varepsilon}{2}$-höz külön az $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$ és a $b_n = \sqrt{n^2-1}-n$ sorozathoz.

$$|a_n| = \sqrt{n^2+1}-n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül, ha $n > \frac{2}{\varepsilon}$.

$$|b_n| = n-\sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ez is teljesül, ha $n > \frac{2}{\varepsilon}$, tehát az $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ megfelel küszöbindexnek:

$$\left|\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}-2n\right| \le \left|\sqrt{n^2+1}-n\right| + \left|\sqrt{n^2-1}-n\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ha $n > n_0$.

2.81. Legyen például $a_n = \frac{1}{n}$, $\quad b_n = \frac{1}{n^2}$.

2.82. Mivel $a > 0$, ezért az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja lehet negatív, így valahonnan kezdve $\sqrt{a_n}$ értelmes.

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \le \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}$$

Mivel $a_n \to a$, választhatunk olyan n_0 küszöbindexet, hogy $n > n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon\cdot\sqrt{a}$ legyen. Ez az n_0 megfelel a keresett küszöbindexnek:

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right| \le \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon\cdot a}{\sqrt{a}} = \varepsilon,$$

ha $n > n_0$.

2.83.

(a) $\frac{a_n}{b_n}$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} > 0$: $\quad a_n = n, \quad b_n = n+1.$

(b) $\frac{a_n}{b_n}$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$: $\quad a_n = n, \quad b_n = n^2.$

(c) $\frac{a_n}{b_n}$ divergens és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$: $\quad a_n = n^2, \quad b_n = n.$

(d) $\frac{a_n}{b_n}$ oszcillálva divergens: $\quad a_n = \begin{cases} n & \text{ha } n \text{ páros} \\ n^2 & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} n^2 & \text{ha } n \text{ páros} \\ n & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

2.84. **P** $\not\Longrightarrow$ **Q**: legyen például $a_n = n+1, \quad b_n = n$.

Q $\Longrightarrow$ **P**: Mivel $b_n \to \infty$, ezért $\dfrac{1}{b_n} \to 0$ és így $\dfrac{a_n - b_n}{b_n} = \dfrac{a_n}{b_n} - 1 \to 0$.

2.85.

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{a_n + 1 - 2}{a_n + 1} = 1 - \frac{2}{a_n + 1} \to 0$$

Fejezzük ki a_n-et b_n segítségével:

$$\frac{2}{a_n + 1} = 1 - b_n, \qquad a_n + 1 = \frac{2}{1 - b_n}, \qquad a_n = \frac{2}{1 - b_n} - 1.$$

A határérték műveleti szabályait alkalmazva kapjuk, hogy $a_n \to 1$.

2.86. **P** $\not\Longrightarrow$ **Q**: legyen például $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Q $\Longrightarrow$ **P**: Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$.

Első eset: $a = \infty$. Ekkor van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén

$$a_n > 1 \geq \frac{1}{n}.$$

Második eset: $0 < a < \infty$: Válasszunk az $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$-höz egy N küszöbindexet, amelyre

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ha $n > N$. De akkor

$$\frac{1}{n} < \varepsilon = \frac{a}{2} = a - \varepsilon < a_n.$$

2.87. Az állításból következik, hogy $a_n \to \infty$, „rendőr-szabály a végtelenre”:

Legyen ugyanis $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $b_n \to \infty$, ezért van olyan N küszöbindex, hogy $n > N$ esetén $K < b_n$. De a feltétel szerint ezekre az n-ekre $K < a_n$ is igaz.

2.88. Semmi sem következik:

az (a_n) sorozat lehet konvergens, például ha $a_n = 0$,

tarthat ∞-hez, például ha $a_n = b_n - 1$,

vagy $-\infty$-hez, például ha $a_n = -n$,

de lehet oszcillálva divergens is, például ha $a_n = (-1)^n$.

2.89. Korlátos, mert konvergens,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2} = 0,$$

ugyanis

$$0 < \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2} \le \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

2.90. Mivel valahonnan kezdve $2^n < \frac{1}{2}3^n$, ezért

$$\frac{3}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{3^n - \frac{1}{2}3^n} < \sqrt[n]{3^n - 2^n} < \sqrt[n]{3^n} = 3,$$

ha n elég nagy. Az egyenlőtlenség bal oldala $\frac{3}{\sqrt[n]{2}} \to 3$, és ezért a **rendőr-szabály** szerint

$$\sqrt[n]{3^n - 2^n} \to 3.$$

2.91. Hozzuk egyszerűbb alakra a sorozat tagjait:

$$a_n = \frac{1-2+3-\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{(1-2)+(3-4)+\cdots+(2n-1-2n)}{\sqrt{n^2+1}} = -\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Végig osztva a számlálót és a nevezőt a nevező nagyságrendjével, n-nel, kapjuk, hogy

$$a_n = -\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to -1.$$

2.3. Monoton sorozatok, részsorozatok

2.113.

- Két pozitív tagú monoton növő/csökkenő sorozat szorzata monoton nő/csökken.
- Két negatív tagú monoton növő/csökkenő sorozat szorzata monoton csökken/nő.
- Egy pozitív tagú monoton növő és egy negatív tagú monoton csökkenő sorozat szorzata monoton csökken.
- Egy pozitív tagú monoton csökkenő és egy negatív tagú monoton növő sorozat szorzata monoton nő.

Más esetekben nem állíthatjuk biztosan, hogy a szorzat monoton.

2.114. Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy $a_n > a_1 \cdot (1,1)^{n-1}$. Elég tehát találnunk egy olyan n-et, amelyre $1,1^{n-1} > \dfrac{10^6}{a_1}$. A **Bernoulli-egyenlőtlenség** szerint

$$(1,1)^{n-1} = (1+0,1)^{n-1} \geq 1 + (n-1)\cdot 0,1 > (n-1)\cdot 0,1 > \frac{10^6}{a_1}.$$

Ez biztosan teljesül, ha $n - 1 > \dfrac{10^7}{a_1}$, azaz ha $n > \dfrac{10^7}{a_1} + 1$.

2.115. Első lépésként belátjuk, hogy a sorozat minden tagja pozitív, de ez teljes indukcióval nyilvánvaló. Most már jobb alsó becslést is mondhatunk a sorozat tagjaira: a (két tagú) számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a}.$$

Belátjuk, hogy $n = 2$-től kezdve az (a_n) sorozat monoton csökken. Felhasználva, hogy $a_n > 0$,

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \leq a_n \iff a_n^2 + a \leq 2a_n^2 \iff a_n^2 \geq a \iff a_n \geq \sqrt{a}.$$

De az előbb már beláttuk, hogy minden $n \geq 2$ esetén $a_n \geq \sqrt{a}$, tehát a sorozat monoton csökken és (alulról) korlátos, de akkor konvergens. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, és persze $b \geq \sqrt{a}$. De akkor $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = b$ is igaz. Másrészt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \to \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right).$$

Tehát

$$\frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) = b \iff b = \sqrt{a}.$$

2.116. A rekurzív képletből könnyű kiolvasni, hogy $a_n \geq 0$ (sőt azt is, hogy $a_n \geq \sqrt{2}$, ha $n > 1$). Másrészt teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $a_n < 2$.

$n = 1$ re ez igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz, hogy $a_n < 2$. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

Megmutatjuk, hogy a sorozat monoton nő. Oldjuk meg a $\sqrt{2+x} \geq x$ egyenlőtlenséget a nemnegatív számok körében:

$$\sqrt{2+x} \geq x \iff 2 + x \geq x^2 \iff x^2 - x - 2 \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 2.$$

Mivel már beláttuk, hogy $0 \leq a_n < 2$, ezért x helyébe írhatunk a_n-et, és így $a_{n+1} \geq a_n$. Tehát (a_n) monoton nő és (felülről) korlátos, ezért konvergens. Legyen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Mivel a sorozat tagjai nemnegatívok, ezért $a \geq 0$. A határérték műveleti szabályai és a rekurzív képlet miatt

$$a = \sqrt{2+a} \iff a = 2.$$

2.117. $a_1 > 0$ és ha $a_n > 0$, akkor $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^3+1} > 0$, ezért minden n-re $a_n > 1$. A rekurzív képlet szerint

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n^3+1} > 0,$$

tehát a sorozat (szigorúan) monoton nő. Indirekt módon megmutatjuk, hogy a sorozat nem konvergens és ezért nem is korlátos. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, akkor $a \geq 0$, mert $a_n \geq 0$, és ezért $a^3 + 1 \neq 0$.

$$a = a + \frac{1}{a^3+1}.$$

De ennek az egyenletnek nincs megoldása! Tehát (a_n) monoton nő és nem korlátos, ezért $a_n \to \infty$.

2.118. Az $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{3}{a_n}\right)$ rekurzív képletből azonnal következik, hogy ha $a_n > 0$, akkor $a_{n+1} > 0$. Mivel $a_1 = 1 > 0$, ezért minden n estén $a_n > 0$. Számoljuk ki a $x = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$ egyenlet gyökeit. Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor valamelyik nem negatív gyökhöz tart.

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{x}\right), \qquad 2x^2 - x - 3 = 0,$$

$$a = \frac{1 - \sqrt{1+24}}{4} = -1, \qquad b = \frac{1 + \sqrt{1+24}}{4} = \frac{3}{2}$$

Az egyenlet vizsgálatából az is kiderül, hogy ha $0 < x < b$, akkor

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{x}\right) > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{b}\right) = \frac{3}{2} = b,$$

és ha $x > b$, akkor

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{x}\right) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{b}\right) = \frac{3}{2} = b.$$

Ez a sorozat tagjaira nézve azt jelenti, hogy $a_n < \dfrac{3}{2}$, ha n páratlan, és $a_n > \dfrac{3}{2}$, ha n páros. Megmutatjuk, hogy a páratlan indexű tagok részsorozata monoton nő, a páros indexűeké pedig monoton csökken. Ha n páratlan, akkor $a_n < b$, és ezért $a_{n+1} > b$, így

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{a_{n+1}}\right) > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{b}\right) = b > a_n.$$

Hasonlóképpen, ha n páros, akkor $a_n > b$ és $a_{n+1} < b$, és ezért

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{a_{n+1}}\right) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{b}\right) = b < a_n.$$

Az eddigi eredményeket összevetve azt kapjuk, hogy a páratlan indexű tagok is konvergálnak és a páros indexű tagok is konvergálnak. Meg kell mutatnunk, hogy mindkét részsorozat $b = \frac{3}{2}$-hez konvergál. Ennek megmutatásához számoljuk ki a_{n+2}-t a_n segítségével.

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{a_n}\right)}\right) = \frac{7a_n + 3}{2(a_n + 3)}$$

$$x = \lim_{n\to\infty} a_{n+2} = \frac{7\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 3}{2(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 3)} = \frac{7x + 3}{2(x + 3)} \iff 2x^2 - x - 3 = 0$$

Ennek az egyenletnek már kiszámoltuk a gyökeit, és az egyetlen pozitív gyöke éppen $b = \frac{2}{3}$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}.$$

2.119. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden n esetén $a_n > 0$. A számtani és mértani közepekről szóló egyenlőtlenséget használva kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2},$$

és mivel $a_1 > \sqrt{2}$, azért minden n esetén $a_n > \sqrt{2}$. Megmutatjuk, hogy az (a_n) sorozat monoton csökken, és mivel alulról korlátos, ezért konvergens.

Mivel $a_n > \sqrt{2}$ ezért $\frac{2}{a_n} < \sqrt{2} < a_n$, és így

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) < \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n.$$

Az (a_n) sorozat határértéke csak az $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ egyenlet pozitív gyöke lehet.

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \iff x^2 = 2$$

Tehát a keresett gyök $\sqrt{2}$, azaz a (a_n) sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}.$$

2.120. Megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton nő. Felhasználva az $(n+1)$ tagú számtani és mértani közepek egyenlőtlenségét

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Most belátjuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \iff \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Most $(n+2)$ tagra használva a számtani és mértani közepek egyenlőtlenségét

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$

Tehát az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens. A sorozat határértékét **Euler-konstansnak** nevezzük és e-vel jelöljük. Belátható, hogy $2 < e < 3$, e irracionális (sőt transzcendens) és $e = 2,71\ldots$.

2.121. **P** $\not\Longrightarrow$ **Q**: legyen $a_n = (-1)^n$.

Q $\Longrightarrow$ **P**: Ha (a_n) konvergens, akkor minden részsorozata is konvergens (és ugyanoda tart).

2.122. Az (a_n) sorozatnak pontosan akkor nincs konvergens részsorozata a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint, ha nincs korlátos részsorozata.

Ez akkor igaz, ha minden $K > 0$ valós számra csak véges sok tagja van a sorozatnak a $[-K, K]$ intervallumban, azaz véges sok n kivételével $|a_n| > K$.

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $|a_n| \to \infty$.

2.4. Nagyságrendek, nevezetes sorozatok

2.136.

$$n^n \sim n! + n^n, \qquad \sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}.$$

Más aszimptotikusan egyenlő pár nincs a sorozatok között. Habár $\dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, de ezek a sorozatok nem tartanak ∞-hez.

2.137.

$$\frac{3,01^n}{2^n+3^n} = \frac{\left(\frac{3,1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}.$$

Itt a számláló ∞-hez tart, mert $\frac{3,1}{3} > 1$, a nevező pedig 1-hez, mert $\frac{2}{3} < 1$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3,01)^n}{2^n+3^n} = \infty.$$

2.138. A nevező nagyságrendje 2^n.

$$\frac{n!-3^n}{n^{10}-2^n} = \frac{\frac{n!}{2^n} - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{\frac{n^{10}}{2^n}-1}.$$

Mivel $\frac{n^{10}}{2^n} \to 0$, ezért a nevező -1-hez tart. Viszont a számláló még mindig kritikus, két végtelenhez tartó sorozat különbsége. Felhasználva, hogy $n! > \left(\frac{n}{4}\right)^n$,

$$\frac{n!}{2^n} - \left(\frac{3}{2}\right)^n > \left(\frac{n}{8}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n > \left(\frac{24}{8}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n > 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

ha $n \geq 24$. Így tehát a számláló ∞-hez tart és

$$\frac{n!-3^n}{n^{10}-2^n} \to -\infty.$$

2.139. $0,99^n n^2 = \dfrac{n^2}{(100/99)^n} \to 0$, mivel $n^2 \prec (100/99)^n$.

2.140. $\dfrac{1,01^n}{n^2} \to \infty$, mivel $n^2 \prec 1,2^n$.

2.141. Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevező nagyságrendjével, $n!$-al.

$$\frac{3^n-\sqrt{n}+n^{10}}{2^n-\sqrt[n]{n}+n!} = \frac{\frac{3^n}{n!}-\frac{\sqrt{n}}{n!}+\frac{n^{10}}{n!}}{\frac{2^n}{n!}-\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}+1} \to \frac{0+0+0}{0+0+1} = 0$$

2.142. Minden elég nagy n-re $2^n > n > 1$, ezért

$$2 = \sqrt[n]{2^n} < \sqrt[n]{2^n + n - 1} < \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2\sqrt[n]{2} \to 2.$$

A rendőr-szabály szerint

$$\sqrt[n]{2^n + n - 1} \to 2.$$

2.143. Osszuk el a számlálót és a nevezőt a nevező nagyságrendjével, 2^n-el.

$$\frac{3^{n+6} + n^2}{2^{n+3}} = \frac{3^6 \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{n^2}{2^n}}{8} \to \frac{\infty + 0}{8} = \infty$$

2.144. Megmutatjuk, hogy a $\frac{4^n + 5^n}{6^n + (-7)^n}$ sorozat 0-hoz tart. Ehhez elég megmutatni, hogy az abszolútértékeinek a sorozata tart 0-hoz.

$$\left|\frac{4^n + 5^n}{6^n + (-7)^n}\right| \le \frac{4^n + 5^n}{7^n - 6^n} = \frac{(4/7)^n + (5/7)^n}{1 - (6/5)^n} \to \frac{0+0}{1-0} = 0$$

3. Végtelen sorok

3.1. Végtelen sorok konvergenciája

3.18. A véges geometriai sor összegképletét használva

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \longrightarrow 2$$

3.19.

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \longrightarrow \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}$$

3.20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n = \frac{4}{9}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} + \frac{5}{9}\frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{4}{5} + \frac{5}{4}$$

3.21. Mivel a tagok nem tartanak 0-hoz, ezért a sor divergens (lásd a **tagok 0-hoz tartásáról** szóló konvergencia kritériumot).

3.22. Nem, például a **harmonikus sor** divergens, de tagjai 0-hoz tartanak.

3.23. A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor részletösszegei úgynevezett **teleszkopikus összegek**:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1.$$

3.24. Mivel $\displaystyle\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{n}$, és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, ezért a **majoráns-kritérium** szerint $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ sor is divergens. Később majd használhatjuk az **integrálkritériumot** is, mert az $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ impropius integrál divergens.

3.2. Pozitív tagú sorok konvergenciakritériumai

3.52.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **harmonikus sor** divergens, ezért annak $1/2$-ed szerese is divergens. Tehát a nála nagyobb $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ sor is divergens (**divergens minoráns** sor).

3.53. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens **majoránsa** a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ sornak, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ sor is konvergens.

3.54.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3}{(1+1/n)^n} \longrightarrow \frac{3}{e} > 1.$$

Ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ sor divergens.

3.55. Mivel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1,$$

ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ sor konvergens.

3.56. Felhasználva, hogy $\sqrt[n]{2^n+1} \to 2$,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{2^n+1}}{3} \to \frac{2}{3} < 1.$$

Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$ sor konvergens.

3.57.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ sor konvergens.

3.58. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{n^4+3n}$ sor nagyságrendje $\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{n^2+4}{n^4+3n}:\frac{1}{n^2}=\frac{(n^2+4)n^1}{n^4+3n}\longrightarrow 1,$$

és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sor konvergens, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{n^4+3n}$ sor is konvergens.

3.59. Belátjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^6}}{n^2+3}$ sor nagyságrendje n, ezért a sor divergens, sőt tagjai ∞-hez (és nem 0-hoz) tartanak.

$$\frac{a_n}{n}=\frac{\sqrt{2n^6}}{n(n^2+3)}=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{3}{n^2}}\to\sqrt{2}.$$

Megjegyzés: Azt, hogy a sor tagjai nem tartanak 0-hoz, a nagyságrendi okoskodás nélkül is könnyen bizonyítható.

3.60.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty,$$

tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ divergens.

3.61.

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2}\longrightarrow\frac{1}{2}<1,$$

tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ konvergens.

3.62. $\frac{n^{10}}{3^n-2^n}<\frac{2n^{10}}{3^n}$, ha $2^n<\frac{1}{2}3^n$, ami valahonnan kezdve igaz. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^{10}}{3^n}$ sorra alkalmazva a gyökkritériumot

$$\sqrt[n]{\frac{2n^{10}}{3^n}}=\frac{\sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10}}{3}\longrightarrow\frac{1}{3}<1,$$

ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{3^n-2^n}$ sor konvergens.

3.63. A sor tagjai nem tartanak 0-hoz:

$$1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \neq 0,$$

tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sor divergens.

3.3. Feltételes és abszolút konvergencia

3.76. Nem igaz, például legyen $a_n = (-1)^n$.

3.77. Az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ Leibniz-sor, mert $\frac{1}{n}$ monoton csökkenően tart 0-hoz, tehát a sor konvergens (de nem abszolút konvergens).

3.78. A $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ sor ugyan váltakozó előjelű, de tagjai nem tartanak 0-hoz ($|a_n| \to 1$), ezért a sor divergens.

3.79. A $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ sor konvergens, mert Leibniz-típusú, de nem abszolút konvergens.

3.80. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ sor abszolút konvergens, mert $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

4. Vegyes feladatok

4.1. Logikai feladatok

4.2. Hibakereső

4.3. Egyenlőtlenségek

4.4. Sorozatok

4.5. Végtelen sorok